TEORIA DEGLI INSIEMI

Il concetto di insieme è relativamente recente nella storia della matematica. La formulazione moderna di insieme si deve al matematico tedesco Georg Cantor (1845-1918) verso la fine dell'800. Cantor arriva alla definizione di insieme durante i suoi studi relativi agli insiemi infiniti che lo portano ad una riflessione profonda dei fondamenti della matematica: gli oggetti matematici che fino ad allora erano considerati "ovvi", come ad esempio il concetto di numero naturale o appunto quello di insieme, vengono da lui e da altri grandi matematici studiati e definiti in modo rigoroso.

Il concetto di insieme è ben conosciuto da tutti noi, infatti ciascuno ha una propria rappresentazione mentale di insieme. Possiamo pensare che insieme sia un raggruppamento, una collezione, una classe, ecc. di oggetti. Nella nostra concezione, cantoriana, l'insieme è una collezione di oggetti che devono soddisfare una certa proprietà. Ovvero, data una proprietà, si deve poter dire, senza ambiguità, se un oggetto soddisfa, e quindi appartiene all'insieme, tale proprietà, oppure non soddisfa, e quindi non appartiene all'insieme, tale proprietà. Come si intuisce questa è tutt'altro che una definizione rigorosa.
Ricapitolando possiamo dire che prenderemo il **concetto di insieme come "primitivo"**, ovvero non definito rigorosamente, anche se ciascuno di noi ne ha una ben precisa rappresentazione mentale.

La definizione di insieme sviluppata da Cantor ed altri, presentò però un grave problema concettuale: andava incontro ad antinomie, la prima e più famosa evidenziata dal matematico-filosofo inglese Bertrand Russell (1872-1970) nel 1902.
Spieghiamo l'antinomia di Russell.

Prendiamo un insieme definito così: $R = \{x \mid x \notin x\}$. Detto nel linguaggio comune: "R è l'insieme di tutti gli elementi che hanno la proprietà di non appartenere a se stessi".

[Questo insieme può sembrare piuttosto oscuro; per chiarirlo si può fare un esempio: sia A l'insieme di tutti gli insiemi che contengono più di tre elementi. A conterrà allora l'insieme di tutti i numeri naturali, l'insieme di tutti gli abitanti della Terra, l'insieme di tutte le automobili prodotte in un anno in Italia, ecc; ovviamente A contiene più di tre elementi, quindi apparterrà a se stesso.

Analogamente si può costruire un insieme B che contiene meno di tre elementi. B conterrà allora l'insieme dei numeri naturali soluzione dell'equazione $x^2 - 4 = 0$, l'insieme dei presidenti attuali della repubblica italiana, l'insieme degli ultra-bicentenari, ecc; in questo caso B non apparterrà a se stesso perché contiene più di tre elementi.]

Ci si domanda se R $\in$ R oppure no.

- Se **R** $\in$ **R**, cioè R è un elemento di R, per come abbiamo definito R (insieme di tutti gli elementi che non appartengono a se stessi: x $\notin$ x) si ha che **R** $\notin$ **R** ↯
- Se **R** $\notin$ **R** allora gode della proprietà degli elementi R di non appartenere a se stessi, quindi **R** $\in$ **R** ↯

In entrambi i casi otteniamo una contraddizione (detta appunto **antinomia di Russell**)

La contraddizione evidenziata da Russell si può spiegare in modo più semplice con il **Paradosso del Barbiere**, inventato dall'autore stesso:

> ***In un villaggio c'è un barbiere che fa la barba a tutti gli abitanti che non si radono da soli. Il barbiere si rade da solo o no ?***

Si vede chiaramente la similitudine con la struttura logica dell'antinomia di Russell:

- Se il barbiere si rade da solo, fa parte di coloro che si radono da soli e quindi non si dovrebbe radere ↯
- Se il barbiere non si rade da solo, fa parte di coloro che non si radono da soli e quindi si dovrebbe radere ↯

L'antinomia di Russell è servita a evidenziare una problematicità nella impostazione cantoriana degli insiemi e quindi ha fornito lo stimolo a lui stesso e ad altri matematici a rifondare la teoria degli insiemi su nuove basi.

La nostra impostazione sarà tuttavia cantoriana e dunque svilupperemo questa linea di pensiero.

Abbiamo detto che un oggetto appartiene, come si vede anche il concetto di **appartenenza è un concetto primitivo** perché non lo definiamo rigorosamente, ad un insieme se soddisfa la proprietà che caratterizza l'insieme, e questo lo dobbiamo poter dire senza ambiguità, quindi la proprietà deve essere netta, inequivocabile.

Esempi di proprietà che **non caratterizzano** insiemi:

- Persone alte
- Quadrati piccoli
- Automobili di colore giallo chiaro
- Stelle vicine al sistema solare

Esempi di proprietà che **caratterizzano** insiemi:

- Persone nate dopo il 01/01/1950
- Quadrati di area 100 cm^2
- Numeri naturali compresi tra 0 e 10
- Numeri razionali

Gli oggetti che appartengono agli insiemi vengono detti **elementi**.

Gli insiemi vengono, generalmente indicati con le lettere maiuscole: A, B, C, D, ... mentre gli elementi vengono indicati con le lettere minuscole: a, b, c, x, y, ...
Se un elemento **x appartiene ad un insieme A** lo indicheremo con: $x \in A$
Se un elemento **x non appartiene ad un insieme A** lo indicheremo con: $x \notin A$

Gli insiemi vengono indicati con il nome, ad esempio A, l'uguale = ed il contenuto dentro le parentesi graffe { }. Esempio A={contenuto}. Il contenuto è formato dagli elementi che appartengono all'insieme.

Rappresentazioni di un insieme.

Gli insiemi vengono rappresentati in almeno tre modi, ma ne esistono altri, legati agli insiemi numerici.

Rappresentazione per elencazione.

Si elencano gli elementi che vi appartengono, separati da virgola o punto e virgola:

A={0,1,2,3}   (si legge *"A è l'insieme che ha come elementi 0,1,2,3"*)

B={rosso, giallo, nero}

C={Cantor, Dedekind, Kronecker, Weierstrass, Frege, Russell}

Il vantaggio di questa rappresentazione è che l'insieme è "leggibile", cioè intuitivo, perché gli elementi li vediamo tutti. Lo svantaggio è quando abbiamo a che fare con insiemi infiniti o finiti ma molto grandi. Per gli insiemi infiniti, se vogliamo usare questa rappresentazione, siamo costretti ad usare un espediente, cioè i puntini, che fanno capire che gli elementi si susseguono potenzialmente all'infinito: se ad esempio vogliamo elencare i numeri naturali dovremo fare: A={0,1,2,3,4,5,6,7,8,...}. Ad un certo punto ci fermiamo e mettiamo i puntini. Per gli insiemi finiti molto grandi il problema è ancora maggiore perché non ce la faremo ad indicarli tutti, ma ad un certo punto finiscono. Allora, se siamo fortunati, possiamo fare così: vogliamo elencare tutti i numeri naturali minori di 1 miliardo: A={0,1,2,3, ... , 999999997, 999999998, 999999999}. In altri casi saremo impossibilitati ad elencarli tutti.

Rappresentazione per proprietà caratteristica.

Si scrive, dentro l'insieme, la proprietà che caratterizza l'insieme:

A={x|x è un numero naturale pari}   (si legge: *"A è l'insieme degli x tale che x è un numero naturale pari"*)

B={x|x è un pianeta del sistema solare}

C={x|x è un triangolo isoscele}

D={$x \in Z$|x<-3} (si legge *"D è l'insieme degli x che appartengono ai numeri interi, tale che x è minore di -3"*, oppure, più sinteticamente, *"D è l'insieme di numeri interi minori di -3"*).

Il vantaggio di questa rappresentazione è che, anche per insiemi infiniti o finiti molto grandi, si riesce a comprendere tutti gli elementi.

Lo svantaggio è che la "lettura" è più difficile e per estrapolare gli elementi si impiega più tempo.

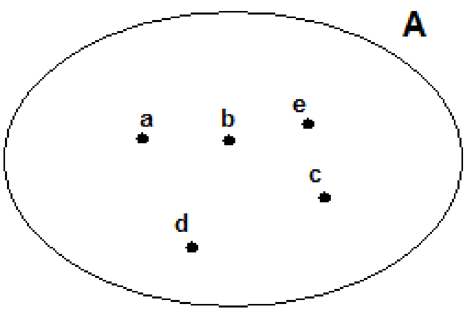
Il simbolo “|” (barretta verticale) si legge “*tale che*”. Il “*tale che*” si può simboleggiare anche con i due punti “:”. Possiamo allora scrivere indifferentemente:

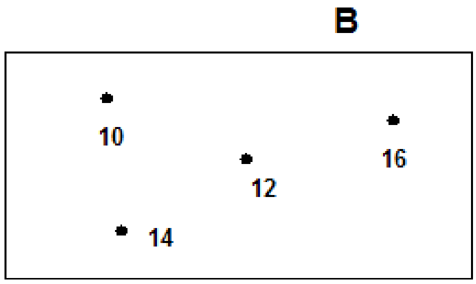
A={x|x è un numero naturale pari} oppure

A={x:x è un numero naturale pari}

Rappresentazione grafica con i diagrammi di Eulero-Venn.

Vengono usate delle linee chiuse, dotate di etichetta che rappresenta il nome dell’insieme, al cui interno si posizionano gli elementi. E’ la forma più intuitiva, ma va incontro agli svantaggi della rappresentazione per elencazione.





Insiemi uguali

Definizione: due **insiemi sono uguali** se contengono gli stessi elementi.

Osservazioni:

- Due insiemi sono uguali anche se cambia l’ordine degli elementi, purché siano gli stessi. Esempio A={1,2,3}, B={3,1,2} sono uguali.
- Un elemento ripetuto non si scrive. Esempio: {1,2,3,3,4} = {1,2,3,4} (il 3 si scrive una sola volta).

L’insieme vuoto

Fra tutti gli insiemi, uno ha una caratteristica particolare, quella di non avere elementi. **Definizione**: si chiama **insieme vuoto** l’insieme che non ha elementi.

L’insieme vuoto si indica in due modi: { } oppure $\emptyset$. Noi useremo quest’ultima notazione.

L'insieme universo

Un altro insieme è particolare fra tutti gli altri, ma di questo non daremo un definizione rigorosa. Ci basterà dire che l'insieme universo, che si indica con la lettera T (o talvolta U), è l'insieme formato da tutti gli elementi possibili e immaginabili.

Sottoinsieme di un insieme

Dato un insieme A formato da certi elementi, posso prenderlo un altro, B, formato da elementi di A. Questo è il concetto intuitivo di sottoinsieme. Diamo la definizione.

Definizione: B si dice **sottoinsieme** di A se ogni elementi di B è elemento di A. Si indica $B \subseteq A$

Facciamo un esempio: sia A={0,1,2,3,4,5}. B={1,3,4} è un sottoinsieme di A perché ogni elemento di B è anche elemento di A (si noti come alcuni elementi di A non siano in B, ma questo, ai fini della nostra definizione, non ha importanza).

Invece C={0,1,6} non è un sottoinsieme di A ($C \not\subset A$) perché l'elemento 6 non appartiene ad A.

Dato un insieme A si considerano sottoinsiemi di A anche l'insieme vuoto ed A stesso. Questi sottoinsiemi, un po' particolari, vengono chiamati **sottoinsiemi impropri**.

Ogni insieme ha dunque sempre due sottoinsiemi impropri: $\emptyset$ e l'insieme stesso. Fa eccezione l'insieme vuoto per il quale $\emptyset$ e l'insieme stesso coincidono.

Tutti gli altri sottoinsiemi di un insieme vengono chiamati **sottoinsiemi propri**.

Osservazioni sul simbolo di sottoinsieme

- Esistono due simboli per indicare che un insieme B è sottoinsieme di un insieme A: $B \subseteq A$ significa che B è sottoinsieme di A e può essere uguale ad A; $B \subset A$ che B è sottoinsieme di A ma non può essere uguale ad A.
- $B \subseteq A$ si legge *"B è contenuto o uguale ad A"* oppure "*B è sottoinsieme di A"*
- $B \subset A$ si legge *"B è contenuto (o contenuto strettamente) in A"* oppure "*B è sottoinsieme di A"*

Insieme potenza o insieme delle parti

Dato un insieme ci possiamo chiedere di costruire tutti i suoi sottoinsiemi.

Definizione: si dice **insieme potenza** o **insieme delle parti** di una insieme A, l'insieme P(A) i cui elementi sono tutti i sottoinsiemi di A.

Esempio: dato A={a,b,c} costruiamo i suoi sottoinsiemi:

Per prima cosa ricordiamoci di mettere l'insieme vuoto e l'insieme stesso:

∅ , A (sottoinsiemi impropri)

Poi scriviamo tutti i possibili sottoinsiemi propri:

{a}

{b}

{c}

{a,b}

{a,c}

{b,c}

Con tutti questi sottoinsiemi costituiamo un nuovo insieme:

P(A)={∅ , A, {a}, {b}, {c}, {a,b}, {a,c }, {b,c}}

Tale insieme viene detto appunto insieme potenza di A.

Per esercizio provare a costruire l'insieme potenza dei seguenti insiemi:

B=∅

C={a,b}

D={a,b,c,d}

Esiste una relazione tra il numero degli elementi dell'insieme dato e il numero di elementi del corrispondente insieme potenza? Se sì, quale?

Insiemi infiniti e finiti

Cercheremo adesso di definire rigorosamente gli insiemi infiniti e quelli finiti. In realtà basterà definire uno dei due concetti, l'altro verrà di conseguenza come la negazione del primo.

Definizione: un **insieme** si dice **infinito** se può essere messo in corrispondenza biunivoca con un suo sottoinsieme proprio. (Questa definizione si deve a Dedekind, matematico contemporaneo ad amico di Cantor.)

Definizione: un **insieme** si dice **finito** se non è infinito.

La definizione di insieme infinito è rigorosa, ma contiene un concetto non ancora introdotto: "corrispondenza biunivoca". Per adesso ci basterà darne una definizione intuitiva. Se vogliamo ad esempio verificare se due contenitori hanno lo stesso numero di pietre colorate abbiamo almeno due strade:

1) contiamo le pietre del primo contenitore, contiamo le pietre del secondo e verifichiamo se si ottengono due numeri uguali.
2) Prendiamo una pietra dal primo contenitore, una dal secondo e le mettiamo, accoppiate da una parte e così via. Se l'ultima pietra del primo contenitore viene presa insieme all'ultima pietra del secondo, allora vuol dire che il numero delle pietre era uguale.

Ebbene, questa associazione 1-1 descritta nel secondo metodo, non è altro che una applicazione pratica del concetto matematico di corrispondenza biunivoca.

Operazioni con gli insiemi.

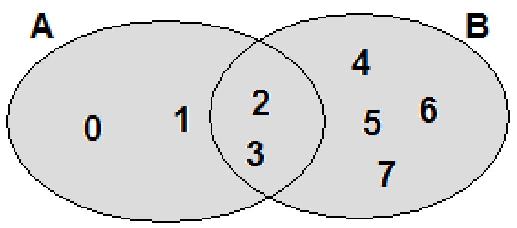
Così come con i numeri, è possibile operare con gli insiemi. Vediamo le principali operazioni.

Unione $\cup$

Definizione: l'**unione** tra due insiemi A e B è l'insieme formato dagli elementi di A o di B.

In simboli: $A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}$.

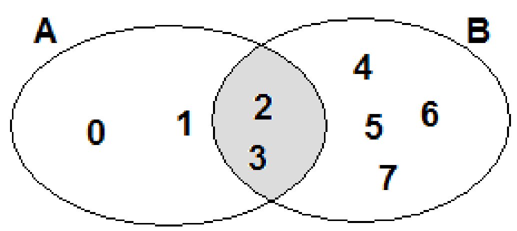
Esempio: A={0,1,2,3} , B={2,3,4,5,6,7} $A \cup B = \{0,1,2,3,4,5,6,7\}$



Intersezione $\cap$

Definizione: l'**intersezione** tra due insiemi A e B è l'insieme formato dagli elementi di A e di B. In simboli: $A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$.

Esempio: A={0,1,2,3} , B={2,3,4,5,6,7} $A \cap B = \{2,3\}$



Particolari coppie di insiemi possono non avere elementi comuni, come ad esempio gli insiemi A={0,1,2,3} , B={6,7,8}. In questo caso A e B prendono il nome di insiemi disgiunti. Altri esempi di coppie di insiemi disgiunti sono: numeri naturali pari / numeri naturali dispari, numeri interi positivi / numeri interi negativi, numeri razionali il cui quadrato è minore di radice di 2 / numeri razionali il cui quadrato è maggiore di radice di 2.

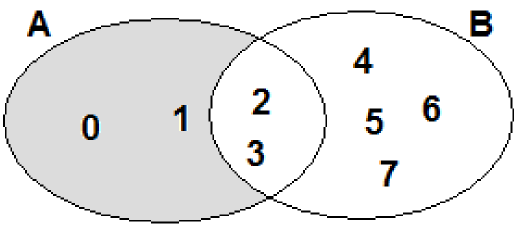
Diamo la definizione rigorosa.

Definizione: due **insiemi** si dicono **disgiunti** se la loro intersezione è l'insieme vuoto.

Differenza -

Definizione: la **differenza** tra due insiemi A e B è l'insieme formato dagli elementi di A ma non di B. In simboli: $A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$.

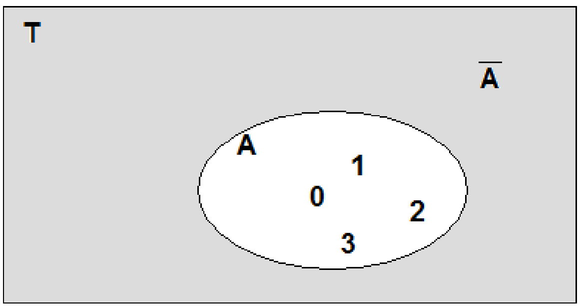
Esempio: A={0,1,2,3} , B={2,3,4,5,6,7} $A - B = \{0,1\}$



Complementare $\overline{A}$

Definizione: il **complementare** di un insieme A è l'insieme degli elementi che <u>non appartengono</u> ad A. In simboli: $\overline{A} = \{x \mid x \notin A\}$.

Esempio: se A={0,1,2,3} $\overline{A} = \{x \mid x \notin A\}$



In questo caso il complementare di A è formato da tutti gli elementi dell'insieme universo che non appartengono ad A (parte grigia della figura).

Noi però tratteremo gli insiemi numerici. In tale ambito considereremo il complementare rispetto ad un insieme che prenderà il posto dell'insieme universo. Se per esempio decidiamo che il nostro insieme universo è l'insieme dei numeri naturali N, il complementare dell'insieme A={0,1,2,3}, rispetto ad N, sarà formato da tutti i numeri naturali maggiori di 3: $\overline{A}_N = \{4,5,6,7,8,...\}$.

Esempio: se A={...,-3,-2,-1,0,+1} e il nostro insieme universo è l'insieme dei numeri interi Z, avremo che $\overline{A}_Z = \{+2,+3,+4,+5,...\}$

Prodotto cartesiano X

Prima di definire il prodotto cartesiano è necessario introdurre un altro concetto.

Definizione: si chiama **coppia ordinata** un insieme formato da due elementi nel quale conta l'ordine degli elementi: (a,b) = {{a},{a,b}}.

La coppia ordinata è dunque un insieme formato da due elementi, ma è diversa dal semplice insieme, in quanto, nella coppia ordinata, è importante quale elemento è il primo e quale è il secondo. Ad esempio, la coppia ordinata (5,11) è diversa dalla coppia (11,5) perché, pur avendo gli stessi elementi, il loro ordine è diverso.

Anche la simbologia è diversa: negli insiemi "normali" si usano le parentesi graffe, nelle coppie ordinate si usano le parentesi tonde.

Adesso possiamo definire l'operazione di prodotto cartesiano tra insiemi.

Definizione: il **prodotto cartesiano** tra due insiemi A e B è l'insieme formato da tutte le coppie ordinate il cui primo elemento appartiene ad A ed il secondo elemento appartiene a B. In simboli: $AXB = \{(a,b) \mid a \in A \text{ e } b \in B\}$.

Esempio: A={0,1,2,3} , B={x,y,z}

$AXB = \{(0,x);(0,y);(0,z);(1,x);(1,y);(1,z);(2,x);(2,y);(2,z);(3,x);(3,y);(3,z)\}$

Provare a costruire i prodotti cartesiani: BXA, AXA, BXB.

Si sarà osservato che il "famoso" piano cartesiano non è altro che il prodotto cartesiano di due insiemi numerici uguali: i numeri reali.

Proprietà delle operazioni con gli insiemi

Le operazioni degli insiemi, così come quelle dei numeri, godono di proprietà. Senza soffermarci su tutte le proprietà vediamo alcune. L'unione e l'intersezione godono della commutativa e della associativa, valgono anche le proprietà distributive dell'una rispetto all'altra. L'insieme vuoto svolge lo stesso ruolo che lo zero ha nei numeri. Due proprietà caratteristiche sono poi le **Leggi di De Morgan**, esse dicono:

$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$ (si legge *"il complementare dell'intersezione fra A e B è uguale all'unione dei complementari di A e B"*)

$\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$ (si legge *"il complementare dell'unione fra A e B è uguale all'intersezione dei complementari di A e B"*)

Facciamo adesso un riepilogo delle definizioni in simboli:

Unione:	$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ o } x \in B\}$
Intersezione:	$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$
Differenza:	$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$
Complementare:	$\overline{A} = \{x \mid x \notin A\}$
Prodotto Cartesiano:	$AXB = \{(a,b) \mid a \in A \text{ e } b \in B\}$

Osservazioni:

- Tra unione e intersezione cambia solo la lettera "o" con "e"
- Tra intersezione e differenza cambia solo l'appartenenza/non appartenenza a B
- Sono tutte operazioni binarie (cioè si applicano a due insiemi), tranne il complementare che è unaria (si applica ad un solo insieme)
- Nel prodotto cartesiano gli elementi sono coppie ordinate e non elementi singoli.