Autore: Enrico Manfucci - 16/03/2011

SISTEMI LINEARI – ESERCIZI CON SOLUZIONI

Risolvere i seguenti sistemi lineari con il metodo di sostituzione e il metodo di Cramer:

1.

$$\begin{cases} 9x - 2y = 6 \\ -3x + y = -12 \end{cases}$$

IL SISTEMA È IN FORMA NORMALE.

METODO DI SOSTITUZIONE

ESPLICITO LA y DALLA SECONDA EQUAZIONE:

$$\begin{cases} 9x - 2y = 6 \\ y = 3x - 12 \end{cases}$$

SOSTITUISCO IL VALORE DELLA y NELLA PRIMA EQUAZIONE:

$$\begin{cases} 9x - 2(3x - 12) = 6 \\ y = 3x - 12 \end{cases}$$

RISOLVO LA PRIMA EQUAZIONE NELL'INCOGNITA x:

$$\begin{cases} 9x - 6x + 24 = 6 \\ \rightarrow \end{cases} \quad \begin{cases} 3x = 6 - 24 \\ \rightarrow \end{cases} \quad \begin{cases} 3x = -18 \\ \rightarrow \end{cases} \quad \begin{cases} x = -\frac{18}{3} = -6 \\ \rightarrow \end{cases}$$

SOSTITUISCO IL VALORE DELLA x NELLA SECONDA EQUAZIONE:

$$\begin{cases} x = -6 \\ y = 3 \cdot (-6) - 12 \end{cases}$$

SVOLGO I CALCOLI PER TROVARE y:

$$\begin{cases} x = -6 \\ y = -18 - 12 \end{cases} \qquad \boxed{\begin{cases} x = -6 \\ y = -30 \end{cases}}$$

IL SISTEMA È RISOLTO!

METODO DI CRAMER

CALCOLO I TRE DETERMINANTI:

$$D_x = \begin{vmatrix} 6 & -2 \\ -12 & 1 \end{vmatrix} = 6 \cdot 1 - (-2) \cdot (-12) = 6 - 24 = -18$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 9 & 6 \\ -3 & -12 \end{vmatrix} = 9 \cdot (-12) - 6 \cdot (-3) = -108 + 18 = -90$$

$$D = \begin{vmatrix} 9 & -2 \\ -3 & 1 \end{vmatrix} = 9 \cdot 1 - (-2) \cdot (-3) = 9 - 6 = 3$$

SOLUZIONI:

$$x = \frac{D_x}{D} = -\frac{18}{3} = -6$$

$$y = \frac{D_y}{D} = \frac{-90}{3} = -30$$

$$\boxed{\begin{cases} x = -6 \\ y = -30 \end{cases}}$$

2.

$$\begin{cases} (x-y)^2-y^2-xy=-y+5+x^2-3xy \\ 5-y+\frac{x}{3}=\frac{3y-x}{2} \end{cases}$$

IL SISTEMA NON È IN FORMA NORMALE. PRIMA RIDUCIAMOLO ALLA FORMA NORMALE

$$\begin{cases} x^2-2xy+\cancel{y^2}-\cancel{y^2}-xy=-y+5+x^2-3xy \\ \frac{30-6y+2x}{\cancel{6}}=\frac{9y-3x}{\cancel{6}} \end{cases}$$

$$\begin{cases} \cancel{x^2}-\cancel{2xy}-\cancel{xy}+y-\cancel{x^2}+\cancel{3xy}=5 \\ 2x+3x-6y-9y=-30 \end{cases} \quad \begin{cases} y=5 \\ 5x-15y=-30 \end{cases} \quad \begin{cases} \rightarrow \\ 5(x-3y)=5\cdot(-6) \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rightarrow \\ \frac{\cancel{5}(x-3y)}{\cancel{5}}=\frac{\cancel{5}\cdot(-6)}{\cancel{5}} \end{cases} \quad \begin{cases} y=5 \\ x-3y=-6 \end{cases}$$

ADESSO È IN FORMA NORMALE

METODO DI SOSTITUZIONE:

POICHÈ LA y NELLA PRIMA EQUAZIONE È GIÀ ESPLICITATA, BASTA SOSTITUIRNE IL VALORE NELLA SECONDA EQUAZIONE:

$$\begin{cases} y=5 \\ x-3\cdot5=-6 \end{cases} \quad \begin{cases} y=5 \\ x-15=-6 \end{cases} \quad \begin{cases} y=5 \\ x=-6+15 \end{cases} \quad \begin{cases} y=5 \\ x=9 \end{cases} \quad \boxed{\begin{cases} x=9 \\ y=5 \end{cases}}$$

METODO DI CRAMER:

PRIMA DI CALCOLARE I DETERMINANTI SI NOTI CHE IL COEFFICIENTE DELLA x NELLA PRIMA EQUAZIONE VALE 0.

$$D_x=\begin{vmatrix} 5 & 1 \\ -6 & -3 \end{vmatrix}=5\cdot(-3)-1\cdot(-6)=-15+6=-9$$

$$D_y=\begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & -6 \end{vmatrix}=0\cdot(-6)-5\cdot1=0-5=-5$$

$$D=\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}=0\cdot(-3)-1\cdot1=0-1=-1$$

$$x=\frac{D_x}{D}=\frac{-9}{-1}=9$$

$$y=\frac{D_y}{D}=\frac{-5}{-1}=5$$

$$\boxed{\begin{cases} x=9 \\ y=5 \end{cases}}$$

3.

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x - 4y = 0 \end{cases}$$

IL SISTEMA È IN FORMA NORMALE.

METODO DI SOSTITUZIONE:

$$\begin{cases} x = 1 + 2y \\ 2(1+2y) - 4y = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \rightarrow \\ 2 + \cancel{4y} - \cancel{4y} = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \rightarrow \\ 2 = 0 \end{cases} \qquad \boxed{\text{SISTEMA IMPOSSIBILE}}$$

METODO DI CRAMER:

$$D_x = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-4) - (-2) \cdot 0 = -4 + 2 = -2$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 1 \cdot 0 - 1 \cdot 2 = 0 - 2 = -2$$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -4 \end{vmatrix} = 1 \cdot (-4) - (-2) \cdot 2 = -4 + 4 = 0$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{-2}{0} \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{-2}{0}$$

IMPOSSIBILE (DIVISIONE PER 0)

4.

$$\begin{cases} 4x - y = 2 \\ 2x - \frac{1}{2}y = 1 \end{cases}$$

IL SISTEMA È IN FORMA NORMALE.

METODO DI SOSTITUZIONE:

$$\begin{cases} 4x - 2 = y \\ 2x - \frac{1}{2}y = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} y = 4x - 2 \\ 2x - \frac{1}{2}(4x - 2) = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \rightarrow \\ \cancel{2x} - \cancel{2x} + 1 = 1 \end{cases} \qquad \begin{cases} \rightarrow \\ 1 = 1 \end{cases} \qquad \boxed{\text{SISTEMA INDETERMINATO}}$$

METODO DI CRAMER:

$$D_x = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = 2 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - (-1) \cdot 1 = -1 + 1 = 0$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 4 \cdot 1 - 2 \cdot 2 = 4 - 4 = 0$$

$$D = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 2 & -\frac{1}{2} \end{vmatrix} = 4 \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) - (-1) \cdot 2 = -2 + 2 = 0$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{0}{0} \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{0}{0}$$

INDETERMINATE

5.

$$\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x - y + z = 7 \\ y + 3z = -1 \end{cases}$$

IL SISTEMA È IN FORMA NORMALE .

METODO DI SOSTITUZIONE:

ESPLICITO LA x DALLA PRIMA EQUAZIONE, LA z DALLA TERZA E SOSTITUISCO ENTRAMBI I VALORI NELLA SECONDA :

$$\begin{cases} x = 1+2y \\ \rightarrow \\ 3z = -1-y \end{cases} \quad \begin{cases} x = 1+2y \\ 2(1+2y) - y + \frac{-1-y}{3} = 7 \\ z = \frac{-1-y}{3} \end{cases} \quad \begin{cases} \rightarrow \\ 2+4y-y-\frac{1}{3}-\frac{y}{3} = 7 \\ \rightarrow \end{cases}$$

$$\begin{cases} \rightarrow \\ 4y-y-\frac{y}{3} = 7+\frac{1}{3}-2 \\ \rightarrow \end{cases} \quad \begin{cases} \rightarrow \\ \frac{12-3-1}{3}y = \frac{21+1-6}{3} \\ \rightarrow \end{cases} \quad \begin{cases} \rightarrow \\ \frac{8}{3}y = \frac{16}{3} \\ \rightarrow \end{cases} \quad \boxed{\begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases}}$$

METODO DI CRAMER (CON REGOLA DI SARRUS PER IL CALCOLO DEI DETERMINANTI):

$$D_x = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ 7 & -1 & 1 & 7 & -1 \\ -1 & 1 & 3 & -1 & 1 \end{array}\right| = 1\cdot(-1)\cdot 3 + (-2)\cdot 1\cdot(-1) + 0\cdot 7\cdot 1 - \big(0\cdot(-1)\cdot(-1) + 1\cdot 1\cdot 1 + (-2)\cdot 7\cdot 3\big) =$$

$$= -3+2+0-(0+1-42) = -1+41 = 40$$

$$D_y = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 7 & 1 & 2 & 7 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & -1 \end{array}\right| = 1\cdot 7\cdot 3 + 1\cdot 1\cdot 0 + 0\cdot 2\cdot(-1) - \big(0\cdot 7\cdot 0 + 1\cdot 1\cdot(-1) + 1\cdot 2\cdot 3\big) =$$

$$= 21+0+0-(0-1+6) = 21-5 = 16$$

$$D_z = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & -2 & 1 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 7 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right| = 1\cdot(-1)\cdot(-1) + (-2)\cdot 7\cdot 0 + 1\cdot 2\cdot 1 - \big(1\cdot(-1)\cdot 0 + 1\cdot 7\cdot 1 + (-2)\cdot 2\cdot(-1)\big) =$$

$$= 1+0+2-(0+7+4) = 3-11 = -8$$

$$D = \left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & -2 & 0 & 1 & -2 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right| = 1\cdot(-1)\cdot 3 + (-2)\cdot 1\cdot 0 + 0\cdot 2\cdot 1 - \big(0\cdot(-1)\cdot 0 + 1\cdot 1\cdot 1 + (-2)\cdot 2\cdot 3\big) =$$

$$= -3+0+0-(0+1-12) = -3+11 = 8$$

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{40}{8} = 5 \quad ; \quad y = \frac{D_y}{D} = \frac{16}{8} = 2 \quad ; \quad z = \frac{D_z}{D} = \frac{-8}{8} = -1 \qquad \boxed{\begin{cases} x = 5 \\ y = 2 \\ z = -1 \end{cases}}$$