SISTEMI LINEARI

Un sistema di equazioni è un insieme di equazioni di cui si vogliono calcolare le soluzioni comuni. Da un punto di vista della teoria degli insiemi questo vuol dire che se la prima equazione ha come insieme di soluzioni l'insieme S_1, la seconda S_2, la n-esima S_n, la soluzione S del sistema sarà data dall'insieme intersezione dei singoli insiemi di soluzioni: $S = S_1 \cap S_2 \cap ... \cap S_n$.

Da un punto di vista grafico le equazioni si scrivono una sotto all'altra, racchiuse, a sinistra, da una parentesi graffa.

Definizione: si definisce **grado di un sistema** il prodotto dei gradi delle singole equazioni.

Esempi:

- $\begin{cases} x^2y - 3x = 5z^2 \\ x^5 - 1 = 0 \\ y^2 - z^2 = xy^6 \end{cases}$ questo sistema di tre equazioni in tre incognite (x,y,z) ha grado 105, perché la prima equazione ha grado 3, la seconda 5, la terza 7 $(3 \cdot 5 \cdot 7 = 105)$.
- $\begin{cases} ab = a - b + 3 \\ a + 5 = b + c \end{cases}$ questo sistema di due equazioni in tre incognite(a,b,c) ha grado 2, perché la prima equazione ha grado 2, la seconda 1 $(2 \cdot 1 = 2)$

Noi studieremo i sistemi di grado 1 (chiamati anche sistemi di primo grado o **sistemi lineari**) in due incognite; di norma le incognite verranno indicate con x ed y. Affinché un sistema sia di grado 1 è necessario dunque che tutte le equazioni del sistema siano di grado 1. Poiché le equazioni di primo grado rappresentano, nel piano cartesiano, delle rette, e poiché abbiamo detto all'inizio che risolvere un sistema significa trovare l'intersezione comune delle varie equazioni che lo costituiscono, possiamo concludere che da un punto di vista geometrico risolvere un sistema lineare significa trovare l'eventuale punto o punti di intersezione delle rette. Il termine "eventuale" verrà chiarito in seguito.

SISTEMI LINEARI DI DUE EQUAZIONI IN DUE INCOGNITE

Definizione: un sistema si dice in **forma normale** se è nella forma: $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$

(dove le incognite sono x ed y, mentre a_1,b_1,c_1,a_2,b_2,c_2 sono coefficienti, cioè numeri reali).

Si noti come in ciascuna equazione deve essere: prima il termine in x, poi quello in y, segno di uguale, termine noto al secondo membro.

Esempi:

$\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ -\frac{1}{3}x + 4y = 3 \end{cases}$ è in forma normale

$\begin{cases} 2x = 3y \\ -\frac{1}{3}x + 4y = 3 \end{cases}$ non è in forma normale perché nella prima equazione 3y non è al primo membro.

$\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ -\frac{1}{3}x + 4y - 3 = 0 \end{cases}$ non è in forma normale perché nella seconda equazione il termine noto è al primo membro.

$\begin{cases} -3y + 2x = 0 \\ -\frac{1}{3}x + 4y = 3 \end{cases}$ non è in forma normale perché nella prima equazione il termine in y precede quello in x.

Per risolvere un sistema lineare si possono utilizzare vari metodi, che si possono utilizzare in base alla convenienza di rapidità di calcolo, ma tutti equivalenti. Di tali metodi ne vedremo due: il metodo di sostituzione e il metodo di Cramer (chiamato anche metodo dei determinanti).

Metodo di sostituzione

Da un punto di vista algebrico non ci sono regole nuove, si tratta semplicemente di eseguire una serie di passi descritti di seguito:

1. esplicitare una incognita da una delle due equazioni
2. sostituire il valore della incognita esplicitata nell'altra equazione
3. trovare il valore dell'incognita
4. risostituire tale valore nell'altra equazione e trovare il valore dell'altra incognita.

Esempio:

Partiamo dal sistema in forma normale e seguiamo la numerazione dei passi visti sopra:

$$\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ -\frac{1}{3}x + 4y = 3 \end{cases}$$

1. decidiamo di esplicitare la x dalla prima equazione (in generale possono servire più passaggi algebrici):

$$\begin{cases} 2x = 3y \\ -\frac{1}{3}x + 4y = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{3}{2}y \\ -\frac{1}{3}x + 4y = 3 \end{cases}$$

2. sostituiamo il valore della x così ottenuto (ovvero $\frac{3}{2}y$) nella seconda equazione:

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2}y \\ -\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{2}y + 4y = 3 \end{cases}$$

3. eseguiamo i calcoli nella seconda equazione per trovare il valore della y:

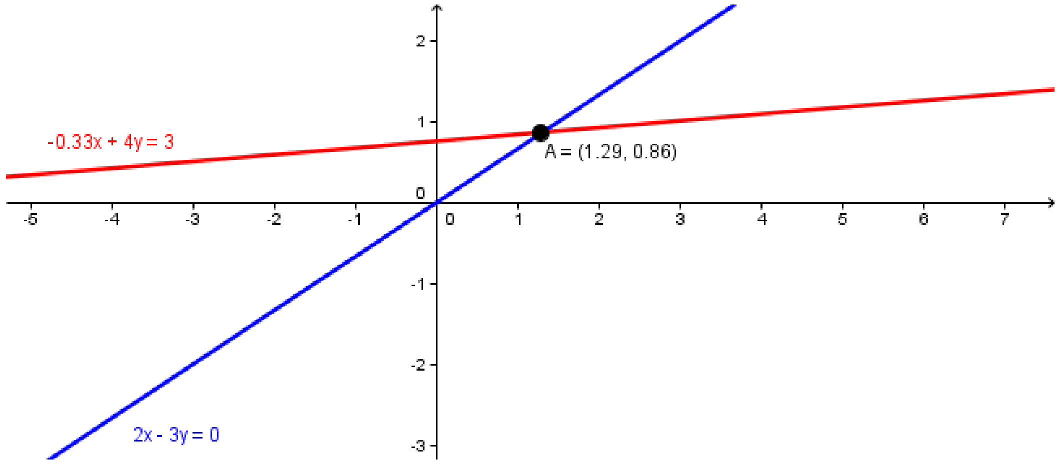
$$\begin{cases} x = \frac{3}{2}y \\ -\frac{1}{2}y + 4y = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{3}{2}y \\ \frac{-1+8}{2}y = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{3}{2}y \\ \frac{7}{2}y = 3 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{3}{2}y \\ y = 3\cdot\frac{2}{7} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{3}{2}y \\ y = \frac{6}{7} \end{cases}$$

4. a questo punto abbiamo trovato il valore della y e possiamo risostituire tale valore nella prima equazione per trovare la x:

$$\begin{cases} x = \frac{3}{2}\cdot\frac{6}{7} \\ y = \frac{6}{7} \end{cases} \qquad \begin{cases} x = \frac{9}{7} \\ y = \frac{6}{7} \end{cases}$$

il sistema è risolto!

Da un punto di vista geometrico la soluzione del sistema rappresenta le <u>coordinate del punto di intersezione delle due rette</u> di partenza: $A\left(\frac{9}{7},\frac{6}{7}\right)$. Tale punto è l'unico comune alle due rette. Se facciamo un collegamento con la teoria degli insiemi ed immaginiamo le rette come insiemi di punti, vediamo che il punto in comune è proprio l'<u>intersezione</u> dei due insiemi. Di seguito è riportata la situazione geometrica:



Osservazioni:

- la scelta di quale incognita esplicitare e da quale equazione è del tutto indifferente. Di norma si sceglie quella "più facile" da esplicitare, ma si ribadisce il fatto che è <u>del tutto indifferente</u>, visto che alla fine le soluzioni non cambiano.
- Nel momento in cui effettuiamo la prima sostituzione (passo 2.) otteniamo una equazione in <u>una sola incognita</u> e questo è importante perché noi sappiamo risolvere equazioni in una sola incognita, mentre è più complesso risolvere quelle in due incognite. Quindi con tale metodo otteniamo un vantaggio in termini di semplicità di calcolo.
- Durante lo svolgimento risolutivo è buona norma portarsi dietro sempre le due equazioni, anche se si lavora per molti passaggi su una sola. Per evitare di riscrivere tutte le volte l'equazione sulla quale non si fanno i calcoli, è lecito mettere al suo posto una freccetta $\rightarrow$.
- Se si parte da un sistema <u>non</u> in forma normale, con questo metodo non è obbligatorio porlo prima in forma normale, ma è comunque conveniente in generale ridurre la complessità iniziale, prima di operare la sostituzione.

Matrici

Il metodo di Cramer viene anche chiamato metodo dei determinanti. Prima di trattare tale metodo è necessario introdurre, seppur in modo non approfondito, il concetto di matrice e determinante di matrice.

Un **matrice** è una tabella di valori, nel nostro caso numeri, individuati da una coppia di indici che ne stabiliscono la posizione all'interno della tabella stessa.

Esempio: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \end{pmatrix}$ questa è una matrice generica formata da 3 righe e 4 colonne (si dice per brevità matrice 3x4). Ciascuno dei dodici elementi è individuato da una coppia di indici che ne stabiliscono l'appartenenza rispettivamente alla riga ed alla colonna.

Un esempio di matrice numerica 3x4 è: $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 8 & 0 \\ 2 & 0 & 7 & 6 \\ 5 & 2 & 9 & 1 \end{pmatrix}$. L'elemento a_{23} (ovvero quello che occupa la riga 2 e colonna 3) vale 7; l'elemento a_{11} vale 3 e così via.

Definizione: se una matrice ha numero di righe uguali al numero di colonne si dice **matrice quadrata**.

Un esempio di matrice quadrata 3x3 è: $A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 8 \\ 2 & 3 & 7 \\ 5 & 2 & 0 \end{pmatrix}$.

Un esempio di matrice quadrata 2x2 è: $A = \begin{pmatrix} 6 & 2 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$.

Definizione: si chiama **diagonale principale** di una matrice quadrata la linea di numeri che va dall'alto a sinistra al basso a destra.

Nei due esempi sopra le diagonali principali sono rispettivamente formate dai numeri:

$$\begin{matrix} 6 & & \\ & 3 & \\ & & 0 \end{matrix} \quad \text{e} \quad \begin{matrix} 6 & \\ & 0 \end{matrix}$$

Ad ogni matrice quadrata può essere associato un numero chiamato **determinante**.

Il calcolo del determinante è relativamente semplice per matrici 2x2 e 3x3, ma diventa più complesso nel caso generale. Noi vedremo solo questi due casi.

Determinante per matrici 2x2:

Data una matrice 2x2 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ il determinante è dato dalla differenza dei prodotti tra gli elementi della diagonale principale e l'altra diagonale.

Il determinante si simboleggia con due barrette verticali ai lati della matrice (è la stessa simbologia del valore assoluto di un numero):

$$|A| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} - a_{12} \cdot a_{21}$$

Esempio: $|A| = \begin{vmatrix} -2 & 5 \\ 4 & 3 \end{vmatrix} = -2 \cdot 3 - 5 \cdot 4 = -6 - 20 = -26$

Il determinante della matrice A è -26.

Determinante per matrici 3x3:

Data una matrice 3x3 $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ per calcolare il determinante si usa la **Regola di Sarrus** che consiste nel riscrivere le prime due colonne fuori dalla matrice e poi eseguire una serie di calcoli esposti di seguito:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{matrix}$$

$$|A| = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} + a_{12} \cdot a_{23} \cdot a_{31} + a_{13} \cdot a_{21} \cdot a_{32} - (a_{13} \cdot a_{22} \cdot a_{31} + a_{11} \cdot a_{23} \cdot a_{32} + a_{12} \cdot a_{21} \cdot a_{33})$$

Esempio: $A = \begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix}$

Si riportano le prime due colonne fuori dalla matrice:

$$\begin{pmatrix} 5 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} 5 & -1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 2 \end{matrix}$$

e si eseguono i calcoli

$$|A| = 5 \cdot 0 \cdot 0 + (-1) \cdot (-2) \cdot 1 + 3 \cdot 2 \cdot 2 - (3 \cdot 0 \cdot 1 + 5 \cdot (-2) \cdot 2 + (-1) \cdot 2 \cdot 0) = 0 + 2 + 12 - (0 - 20 + 0) =$$

$$= 14 + 20 = 34$$

Il determinante della matrice A è 34.

Metodo di Cramer

Adesso che abbiamo lo strumento algebrico delle matrici, possiamo affrontare il metodo di Cramer per la risoluzione dei sistemi lineari. Per poter risolvere il sistema con questo metodo è necessario partire dal sistema in forma normale. Questo significa che se viene fornito un sistema non in forma normale, va prima ridotto alla forma normale, usando le usuali regole algebriche conosciute. Esponiamo prima la teoria, trattando il caso generale.

Sia dato il sistema in forma normale: $\begin{cases} a_1x + b_1y = c_1 \\ a_2x + b_2y = c_2 \end{cases}$

Definiamo tre determinanti in questo modo:

$D_x = \begin{vmatrix} c_1 & b_1 \\ c_2 & b_2 \end{vmatrix}$ (matrice 2x2 in cui la colonna dei coefficienti delle x è stata sostituita da quella dei termini noti)

$D_y = \begin{vmatrix} a_1 & c_1 \\ a_2 & c_2 \end{vmatrix}$ (matrice 2x2 in cui la colonna dei coefficienti delle y è stata sostituita da quella dei termini noti)

$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$ (matrice 2x2 formata dai coefficienti delle x e delle y)

Le soluzioni sono date dalle seguenti semplici formule:

$$x = \frac{D_x}{D} \qquad y = \frac{D_y}{D}$$

Esempio: risolviamo il sistema visto come esempio per il metodo di sostituzione (ovviamente ci aspettiamo di ritrovare le stesse soluzioni!).

$$\begin{cases} 2x - 3y = 0 \\ -\frac{1}{3}x + 4y = 3 \end{cases}$$

Costruiamo le tre matrici e troviamo i rispettivi determinanti:

$$D_x = \begin{vmatrix} 0 & -3 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 0 \cdot 4 - (-3) \cdot 3 = 9$$

$$D_y = \begin{vmatrix} 2 & 0 \\ -\frac{1}{3} & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot 3 - 0 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = 6$$

$$D = \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -\frac{1}{3} & 4 \end{vmatrix} = 2 \cdot 4 - (-3) \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = 8 - 1 = 7$$

da cui:

$$x = \frac{D_x}{D} = \frac{9}{7} \qquad y = \frac{D_y}{D} = \frac{6}{7}$$

SISTEMI LINEARI DI TRE EQUAZIONI IN TRE INCOGNITE

Un sistema lineare di tre equazioni in tre incognite in forma normale è della forma:

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1z = d_1 \\ a_2x + b_2y + c_2z = d_2 \\ a_3x + b_3y + c_3z = d_3 \end{cases}$$

Per risolverlo possiamo applicare più volte il metodo di sostituzione, ma spesso i calcoli sono lunghi e laboriosi. Un metodo alternativo più rapido è quello che sfrutta le matrici. Si calcolano i determinanti di quattro matrici e poi le soluzioni in modo simile al caso 2x2:

$$D_x = \begin{vmatrix} d_1 & b_1 & c_1 \\ d_2 & b_2 & c_2 \\ d_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad D_y = \begin{vmatrix} a_1 & d_1 & c_1 \\ a_2 & d_2 & c_2 \\ a_3 & d_3 & c_3 \end{vmatrix} \qquad D_z = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & d_3 \end{vmatrix} \qquad D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}$$

Per calcolare i determinanti si applica la Regola di Sarrus esposta sopra.

Le soluzioni sono date da:

$$x = \frac{D_x}{D} \qquad y = \frac{D_y}{D} \qquad z = \frac{D_z}{D}$$

SISTEMI DETERMINATI, INDETERMINATI, IMPOSSIBILI

In base alle soluzioni un sistema può essere di tre tipi:

1. **Determinato**: una soluzione
2. **Indeterminato**: infinite soluzioni
3. **Impossibile**: zero soluzioni

Questi tre casi corrispondono a tre situazioni geometriche, rispettivamente:

1. Rette **incidenti**: un punto in comune
2. Rette **coincidenti**: infiniti punti in comune
3. Rette **parallele**: zero punti in comune

Facciamo un esempio per ciascun caso, evidenziano sia l'aspetto algebrico che geometrico. Per semplicità partiamo da sistemi in forma normale:

1. $\begin{cases} 2x + y = 1 \\ -x + 3y = 10 \end{cases}$

Esplicitiamo la y dalla prima equazione e sostituiamo il valore ottenuto nella seconda:

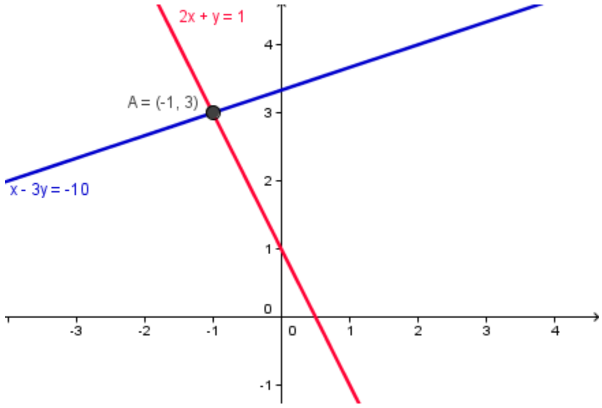
$$\begin{cases} y = 1 - 2x \\ -x + 3 \cdot (1 - 2x) = 10 \end{cases}$$

Risolviamo la seconda equazione nell'incognita x:

$$\begin{cases} y = 1 - 2x \\ -x + 3 - 6x = 10 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 1 - 2x \\ -x - 6x = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 1 - 2x \\ -7x = 7 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 1 - 2x \\ x = -1 \end{cases}$$

Risostituiamo il valore della x nella prima equazione:

$\begin{cases} y = 1 - 2 \cdot (-1) \\ x = -1 \end{cases} \quad \begin{cases} y = 3 \\ x = -1 \end{cases}$ il sistema è **determinato** perché abbiamo ottenuto una soluzione, cioè il punto $A(-1,3)$. Le due rette sono **incidenti**.



2. $\begin{cases} 4x - y = 2 \\ 2x - \frac{1}{2}y = 1 \end{cases}$

Esplicitiamo la y dalla seconda equazione:

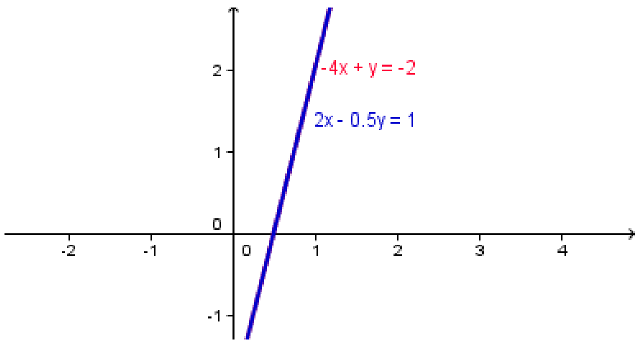
$$\begin{cases} 4x - y = 2 \\ 2x - 1 = \frac{1}{2}y \end{cases} \quad \begin{cases} 4x - y = 2 \\ 2 \cdot (2x - 1) = y \end{cases} \quad \begin{cases} 4x - y = 2 \\ 4x - 2 = y \end{cases} \quad \begin{cases} 4x - y = 2 \\ y = 4x - 2 \end{cases}$$

Sostituiamo il valore ottenuto nella prima equazione:

$$\begin{cases} 4x - (4x - 2) = 2 \\ y = 4x - 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x - 4x + 2 = 2 \\ y = 4x + 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 4x - 4x = 2 - 2 \\ y = 4x + 2 \end{cases} \quad \begin{cases} 0 = 0 \\ y = 4x + 2 \end{cases}$$

La prima equazione si è ridotta ad una identità (proposizione sempre vera indipendentemente dal valore di x ed y), quindi tutti i punti della prima retta sono punti anche della seconda. Il sistema è dunque **indeterminato** e le rette sono **coincidenti**.

Osservazione: se lo avessimo risolto con il metodo di Cramer avremmo trovato i tre determinanti uguali a 0 e poiché $x = \frac{D_x}{D}$ e $y = \frac{D_y}{D}$, abbiamo in entrambi i casi $\frac{0}{0}$ che è appunto una forma indeterminata.



3. $\begin{cases} x - 2y = 1 \\ 2x - 4y = 0 \end{cases}$

Esplicitiamo la x dalla prima equazione e sostituiamo il valore nella seconda equazione:

$$\begin{cases} x = 1 + 2y \\ 2 \cdot (1 + 2y) - 4y = 0 \end{cases}$$

Svolgendo i calcoli nella seconda equazione si ha:

$$\begin{cases} \rightarrow \\ 2 + 4y - 4y = 0 \end{cases} \quad \begin{cases} \rightarrow \\ 4y - 4y = 0 - 2 \end{cases} \quad \begin{cases} \rightarrow \\ 0 = -2 \end{cases}$$

La seconda equazione non è mai vera per nessun valore di x ed y, quindi non esistono punti in comune fra le due rette. Il sistema è **impossibile** e le rette sono **parallele**.

Osservazione: risolvendolo con Cramer avremmo ottenuto il determinante D uguale a 0. Poiché D compare al denominatore sia di x che di y, si ha una divisione per 0 che è appunto impossibile (come esercizio calcolare i coefficienti angolari delle due rette e verificare che sono uguali).