REALI – ESERCIZI CON SOLUZIONI

1. Calcolare il valore assoluto dei seguenti numeri:
   a. -11 $\quad |-11| = 11$
   b. 45 $\quad |45| = 45$
   c. 0 $\quad |0| = 0$
   d. $\frac{1}{4}$ $\quad \left|\frac{1}{4}\right| = \frac{1}{4}$
   e. $-\frac{7}{3}$ $\quad \left|-\frac{7}{3}\right| = \frac{7}{3}$
   f. $2{,}57$ $\quad |2{,}57| = 2{,}57$
   g. $-1{,}\overline{6}$ $\quad |-1{,}\overline{6}| = 1{,}\overline{6}$
   h. $\sqrt{5}$ $\quad |\sqrt{5}| = \sqrt{5}$
   i. $-\sqrt{\frac{5}{4}}$ $\quad \left|-\sqrt{\frac{5}{4}}\right| = \sqrt{\frac{5}{4}}$
   j. $1-\sqrt{2}$ $\quad |1-\sqrt{2}| = \sqrt{2}-1$
   k. $\log\frac{1}{10}$ $\quad \left|\log\frac{1}{10}\right| = -\log\frac{1}{10}$
   l. -2^{100} $\quad |-2^{100}| = 2^{100}$
   m. $(-2)^{100}$ $\quad |(-2)^{100}| = (-2)^{100}$

2. Calcolare la distanza tra i seguenti punti (numeri):
   a. $x = 5$ $\quad y = -2$ $\quad d(x,y) = |x-y| = |5-(-2)| = |5+2| = |7| = 7$
   b. $x = 0$ $\quad y = 4$ $\quad d(0,4) = |0-4| = |-4| = 4$
   c. $a = -\frac{1}{2}$ $\quad b = \frac{5}{2}$ $\quad d\left(-\frac{1}{2},\frac{5}{2}\right) = \left|-\frac{1}{2}-\frac{5}{2}\right| = \left|-\frac{6}{2}\right| = |-3| = 3$
   d. $a = -\sqrt{2}$ $\quad b = -\sqrt{3}$ $\quad d(-\sqrt{2},-\sqrt{3}) = |-\sqrt{2}+\sqrt{3}| = \sqrt{3}-\sqrt{2}$
   e. $x_1 = \ln(3)$ $\quad x_2 = \ln(1)$ $\quad d(\ln(3),\ln(1)) = |\ln(3)-\ln(1)| = |\ln(3)-0| = \ln(3)$
   f. $x_1 = 1$ $\quad x_2 = 1$ $\quad d(1,1) = |1-1| = |0| = 0$

3. Verificare con la calcolatrice che la disuguaglianza triangolare è vera per i numeri
   $x = \sqrt{7}$ $\qquad y = -\sqrt{2}$

La disuguaglianza triangolare dice che: $d(x,y) \le d(x,z) + d(z,y)$. Per prima cosa calcoliamo il valore di x ed y con la calcolatrice, ad esempio, alla seconda cifra decimale:

$x = \sqrt{7} = 2{,}65$

$y = -\sqrt{2} = -1{,}41$

Adesso prendiamo un altro numero reale qualsiasi: $z = 3$. Calcoliamo le tre distanze:

$d(x,y) = |2{,}65 + 1{,}41| = 4{,}06$

$d(x,z) = |2{,}65 - 3| = 0{,}35$

$d(z,y) = |3 + 1{,}41| = 4{,}41$

Da cui si deduce che $4{,}06 \le 0{,}35 + 4{,}41$

4. Scrivere, sotto forma di insiemi per caratteristica i seguenti intervalli
   a. $(0,2) = \{x \in R : 0 < x < 2\}$
   b. $\left(-1,\frac{3}{2}\right) = \left\{x \in R : -1 < x < \frac{3}{2}\right\}$
   c. $(-\infty,0) = \{x \in R : x < 0\}$
   d. $[3,10) = \{x \in R : 3 \le x < 10\}$

e. $[-5,+\infty) = \{x \in R : x \geq -5\}$
f. $[-10,10] = \{x \in R : -10 \leq x \leq 10\}$

5. Scrivere, sotto forma di intervalli i seguenti insiemi per caratteristica
   a. $\{x \in R : -1 < x < 1\} = (-1,1)$
   b. $\{x \in R : x < 7\} = (-\infty,7)$
   c. $\{x \in R : x \geq 0\} = [0,+\infty)$
   d. $\{x \in R : -5 \leq x < 6\} = [-5,6)$

6. Scrivere, sotto forma di insiemi per caratteristica i seguenti intorni
   a. $I(2,3) = \{x \in R : d(x,2) < 3\} = \{x \in R : |x-2| < 3\} = \{x \in R : 2-3 < x < 2+3\}$
   b. $I(-1,7) = \{x \in R : d(x,-1) < 7\} = \{x \in R : |x+1| < 7\} = \{x \in R : -1-7 < x < -1+7\}$
   c. $I(0,1) = \{x \in R : d(x,0) < 1\} = \{x \in R : |x| < 1\} = \{x \in R : -1 < x < 1\}$
   d. $I(2,\varepsilon) = \{x \in R : d(x,2) < \varepsilon\} = \{x \in R : |x-2| < \varepsilon\} = \{x \in R : 2-\varepsilon < x < 2+\varepsilon\}$

7. Scrivere, sotto forma di intorni i seguenti insiemi per caratteristica
   a. $\{x \in R : -1 < x < 1\} = I(0,1)$
   b. $\{x \in R : |x-3| < 6\} = I(3,6)$
   c. $\{x \in R : |x-\delta| < \varepsilon\} = I(\delta,\varepsilon)$

8. Scrivere, sotto forma di intorni i seguenti intervalli
   a. $(-2,2) = I(0,2)$
   b. $(-6,4) = I(-1,5)$
   c. $(3-r,3+r) = I(3,r)$

9. Scrivere, sotto forma di intervalli i seguenti intorni
   a. $I(0,1) = (-1,1)$
   b. $I\left(\frac{1}{2},3\right) = \left(-\frac{5}{2},\frac{7}{2}\right)$
   c. $I(x_0,2) = (x_0-2,x_0+2)$

10. Dati i seguenti insiemi, stabilire se i punti a fianco sono di accumulazione per l'insieme oppure no

a. $A = \{x \in R : -1 < x \leq 1\}$	$x_0 = -1$	**SI**	NO
	$x_0 = 1$	**SI**	NO
	$x_0 = 4$	SI	**NO**
	$x_0 = 0$	**SI**	NO
b. $B = (-2,3)$	$x_0 = -5$	SI	**NO**
	$x_0 = -2$	**SI**	NO
	$x_0 = -1$	**SI**	NO
	$x_0 = 3$	**SI**	NO

c. $C = [-2,3]$	$x_0 = -5$	SI	NO
	$x_0 = -2$	SI	NO
	$x_0 = -1$	SI	NO
	$x_0 = 3$	SI	NO
d. $D = [1,+\infty)$	$x_0 = 0$	SI	NO
	$x_0 = 1$	SI	NO
	$x_0 = 0{,}9$	SI	NO
	$x_0 = 100$	SI	NO
e. $E = (-\infty,0) \cup (0,+\infty)$	$x_0 = 0$	SI	NO
	$x_0 = 1$	SI	NO
	$x_0 = -10$	SI	NO
	$x_0 = 100$	SI	NO
f. $F = \{x \in N : x \leq 10\}$	$x_0 = 0$	SI	NO
	$x_0 = 1$	SI	NO
	$x_0 = 10$	SI	NO
	$x_0 = 20$	SI	NO

11. Dati i seguenti insiemi, stabilire se i punti a fianco sono punti isolati per l'insieme oppure no

a. $A = \{x \in R : -1 < x \leq 1\}$	$x_0 = 0$	SI	NO
	$x_0 = 1$	SI	NO
b. $B = \{x \in N : x \leq 10\}$	$x_0 = 0$	SI	NO
	$x_0 = 10$	SI	NO
c. $C = (-2,2) \cup \{5\}$	$x_0 = 0$	SI	NO
	$x_0 = 1$	SI	NO
	$x_0 = 5$	SI	NO

12. Per i seguenti insiemi, dire/trovare, quando possibile

- Esempio di maggiorante
- Esempio di minorante
- Insieme dei maggioranti
- Insieme dei minoranti
- Limitato superiormente
- Limitato inferiormente
- Limitato
- Massimo
- Minimo
- Estremo superiore

- Estremo inferiore

a. $\{x \in R : -1 < x \le 1\}$
   - Esempio di maggiorante: 5
   - Esempio di minorante: -2
   - Insieme dei maggioranti: $[1, +\infty)$
   - Insieme dei minoranti: $(-\infty, -1]$
   - Limitato superiormente: SI
   - Limitato inferiormente: SI
   - Limitato: SI
   - Massimo: 1
   - Minimo: $\neg\exists$
   - Estremo superiore: 1
   - Estremo inferiore: -1

b. $(-2, 3)$
   - Esempio di maggiorante: 6
   - Esempio di minorante: -3
   - Insieme dei maggioranti: $[3, +\infty)$
   - Insieme dei minoranti: $(-\infty, -2]$
   - Limitato superiormente: SI
   - Limitato inferiormente: SI
   - Limitato: SI
   - Massimo: $\neg\exists$
   - Minimo: $\neg\exists$
   - Estremo superiore: 3
   - Estremo inferiore: -2

c. $[1, +\infty)$
   - Esempio di maggiorante: $\neg\exists$
   - Esempio di minorante: -3
   - Insieme dei maggioranti: $\emptyset$
   - Insieme dei minoranti: $(-\infty, 1]$
   - Limitato superiormente: NO
   - Limitato inferiormente: SI
   - Limitato: NO
   - Massimo: $\neg\exists$
   - Minimo: 1
   - Estremo superiore: $\neg\exists$
   - Estremo inferiore: 1

d. $(-\infty, 0)$
   - Esempio di maggiorante: 9
   - Esempio di minorante: $\neg\exists$
   - Insieme dei maggioranti: $[0, +\infty)$
   - Insieme dei minoranti: $\emptyset$

- Limitato superiormente: SI
- Limitato inferiormente: NO
- Limitato: NO
- Massimo: $\neg\exists$
- Minimo: $\neg\exists$
- Estremo superiore: 0
- Estremo inferiore: $\neg\exists$

e. $[3,10)$

- Esempio di maggiorante: 1054
- Esempio di minorante: 2
- Insieme dei maggioranti: $[10,+\infty)$
- Insieme dei minoranti: $(-\infty,3]$
- Limitato superiormente: SI
- Limitato inferiormente: SI
- Limitato: SI
- Massimo: $\neg\exists$
- Minimo: 3
- Estremo superiore: 10
- Estremo inferiore: 3

f. $(-\infty,1]$

- Esempio di maggiorante: 9
- Esempio di minorante: $\neg\exists$
- Insieme dei maggioranti: $[1,+\infty)$
- Insieme dei minoranti: $\emptyset$
- Limitato superiormente: SI
- Limitato inferiormente: NO
- Limitato: NO
- Massimo: 1
- Minimo: $\neg\exists$
- Estremo superiore: 1
- Estremo inferiore: $\neg\exists$

g. $[-10,10]$

- Esempio di maggiorante: 1854
- Esempio di minorante: -753
- Insieme dei maggioranti: $[10,+\infty)$
- Insieme dei minoranti: $(-\infty,-10]$
- Limitato superiormente: SI
- Limitato inferiormente: SI
- Limitato: SI
- Massimo: 10
- Minimo: -10
- Estremo superiore: 10
- Estremo inferiore: -10

h. $(-2,2) \cup \{5\}$
- Esempio di maggiorante: 6
- Esempio di minorante: -3
- Insieme dei maggioranti: $[5,+\infty)$
- Insieme dei minoranti: $(-\infty,-2]$
- Limitato superiormente: SI
- Limitato inferiormente: SI
- Limitato: SI
- Massimo: 5
- Minimo: $\neg\exists$
- Estremo superiore: 5
- Estremo inferiore: -2

i. R
- Esempio di maggiorante: $\neg\exists$
- Esempio di minorante: $\neg\exists$
- Insieme dei maggioranti: $\emptyset$
- Insieme dei minoranti: $\emptyset$
- Limitato superiormente: NO
- Limitato inferiormente: NO
- Limitato: NO
- Massimo: $\neg\exists$
- Minimo: $\neg\exists$
- Estremo superiore: $\neg\exists$
- Estremo inferiore: $\neg\exists$