I NUMERI REALI

CENNI STORICI

La prima testimonianza di calcolo di un numero reale risale al 1700 a.C. e si trova in una tavoletta mesopotamica nella quale si approssima il numero $\sqrt{2}$. Il calcolo deriva dal problema geometrico di trovare la diagonale di un quadrato dato il lato. Il valore sulla tavoletta è corretto fino alla quinta cifra decimale. Non sappiamo come i babilonesi abbiano ottenuto un valore così preciso, né se si fossero resi conto che il valore trovato fosse un’approssimazione del valore cercato e non il numero esatto. La grande civiltà mesopotamica, così come quella egiziana, aveva però un approccio prevalentemente pratico alla matematica. E’ la civiltà greca che, per prima, si avvicina alla matematica con una concezione totalmente diversa: gli oggetti matematici sono degni di attenzione e studio in se stessi e non solo perché sono utili. La prima figura eminente che rispecchia questo modo di pensare è **Pitagora** di Samo (570-500 a.C. circa). In particolare, all’interno della sua scuola, viene fatta una scoperta sensazionale, cioè il rapporto di alcuni enti geometrici, come ad esempio quello della diagonale e del lato del quadrato, non sono esprimibili tramite numeri interi: è la scoperta dell’incommensurabilità/irrazionalità, ovvero per la prima volta si ha coscienza dell’esistenza di numeri non razionali. Nasce ufficialmente lo studio dei numeri irrazionali che, insieme ai razionali, formano i numeri reali.

La storia dei numeri irrazionali è ricca di eventi che vedremo rapidamente: ricordiamo, ad esempio, il problema del numero π legato alla lunghezza della circonferenza e del suo raggio. Durante il nostro medioevo lo studio degli irrazionali viene formalizzato dai matematici arabi e i loro risultati vengono diffusi in Europa da **Leonardo Pisano**, detto Fibonacci, che nel 1202 pubblica il *Liber Abaci*. Andando avanti si arriva al ‘700, dove grandi matematici studiano gli irrazionali; ricordiamo: **Eulero**, **Lambert**, **Legendre**, **Liouville**. Ma è solo nella seconda metà dell’800 che gli irrazionali trovano forma compiuta. Si fornisce di seguito un elenco dei grandi risultati e pubblicazioni al riguardo:

Nel 1873 **Hermite** dimostra la trascendenza del numero e.

Nel 1882 **Lindemann** dimostra la trascendenza del numero π.

A partire dal 1859 **Weierstrass**, nelle sue lezioni universitarie, mette a punto la prima teoria dei reali (Weierstrass non pubblicò niente al riguardo, ma i suoi allievi diffusero la sua teoria). Il metodo di insegnamento di Weierstrass è quello che utilizziamo ancora oggi.

Nel 1872 **Dedekind** concepisce una teoria dei numeri reali che troviamo nell'opuscolo *Stetigkeit und irrationale Zahlen* (Continuità e numeri irrazionali).
Nel 1872 **Cantor** pubblica un articolo dal titolo *Sulla estensione di un teorema della teoria delle serie trigonometriche* nel quale è contenuta una prima e concisa esposizione della teoria numeri reali come limiti di successioni.
Nel 1899 **Hilbert** propone una teoria assiomatica dei numeri reali.

Ma cosa sono i numeri irrazionali? Ebbene la definizione rigorosa non è per nulla semplice, ma proveremo a dare alcune definizioni intuitive:
I numeri irrazionali sono numeri decimali con un numero infinito di cifre decimali non periodiche.
Ciascun numero irrazionale viene approssimato da due successioni di numeri razionali che si "avvicinano" al numero irrazionale una per difetto e una per eccesso.
E' poi utile immaginarsi i numeri reali come punti di una retta e viceversa. Possiamo dire, con esattezza, che tra i numeri reali e i punti di una retta esiste una corrispondenza biunivoca.

VALORE ASSOLUTO DI UN NUMERO REALE
Sia $a \in R$, si definisce valore assoluto (o modulo) di a il numero:

$$\boxed{|a| = \begin{cases} a & \text{se } a > 0 \\ 0 & \text{se } a = 0 \\ -a & \text{se } a < 0 \end{cases}}$$

Si ha che $\forall\, a, b \in R$ sono verificate le seguenti disuguaglianze:

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$
$$|a - b| \geq |a| - |b|$$

DISTANZA TRA DUE NUMERI REALI
Siano $x, y \in R$, si definisce distanza tra x e y il numero reale:

$$\boxed{d(x, y) = |x - y|}$$

Si ha che $\forall\, x, y, z \in R$ si hanno le seguenti proprietà:
1. $d(x, y) \geq 0$; $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (disuguaglianza triangolare)

INTERVALLI

Siano $a,b \in$ R, si definisce:

- Intervallo aperto di estremi a e b l'insieme $(a,b) = \{x \in R : a < x < b\}$
- Intervallo aperto a sinistra (chiuso a destra) di estremi a e b l'insieme $(a,b] = \{x \in R : a < x \le b\}$
- Intervallo aperto a destra (chiuso a sinistra) di estremi a e b l'insieme $[a,b) = \{x \in R : a \le x < b\}$
- Intervallo chiuso di estremi a e b l'insieme $[a,b] = \{x \in R : a \le x \le b\}$

Se a o b sono uguali a $\pm\infty$ si hanno i seguenti casi:

- $(-\infty,+\infty) = R = \{x \in R\}$
- $(-\infty,b) = \{x \in R : x < b\}$
- $(-\infty,b] = \{x \in R : x \le b\}$
- $(a,+\infty) = \{x \in R : x > a\}$
- $[a,+\infty) = \{x \in R : x \ge a\}$

INTORNI

Sia $x_0 \in$ R e $r_1,r_2 \in R^+$, si definisce intorno completo di x_0 l'insieme:

$I_{x_0} = \{x \in R : x_0 - r_1 < x < x_0 + r_2\} = (x_0 - r_1, x_0 + r_2)$

Siano $x_0 \in$ R e $r \in R^+$, si definiscono:

- intorno sferico (o circolare) di centro x_0 e raggio r l'insieme:

  $I(x_0,r) = \{x \in R : d(x,x_0) < r\} = \{x \in R : |x - x_0| < r\} = \{x \in R : x_0 - r < x < x_0 + r\} = (x_0 - r, x_0 + r)$

- intorno sinistro di x_0 l'insieme: $\{x \in R : x_0 - r < x < x_0\} = (x_0 - r, x_0)$
- intorno destro di x_0 l'insieme: $\{x \in R : x_0 < x < x_0 + r\} = (x_0, x_0 + r)$

PUNTO DI ACCUMULAZIONE

Sia $A \subseteq R$. Un punto $x_0 \in$ R si dice punto di accumulazione per A se:

per ogni intorno di x_0 esiste un punto x di A, diverso da x_0, t.c. x appartiene a tale intorno.

$\forall\ I_{x_0}\ \exists\ x \in A, x \neq x_0,\ :\ x \in I_{x_0}$

> **Osservazione**: si dimostra che se per ogni intorno di x_0 esiste almeno un punto di A, diverso da x_0, che appartiene a tale intorno allora appartengono a tale intorno infiniti punti di A.

PUNTO ISOLATO

Sia $A \subseteq R$. Un punto $x_0 \in A$ si dice punto isolato di A se:

esiste un intorno di x_0 che non contiene elementi di A, diversi da x_0.

$\exists\ I_{x_0} :\ \forall\ x \in A, x \neq x_0,\ x \notin I_{x_0}$

MAGGIORANTE/MINORANTE – MASSIMO/MINIMO – ESTREMO SUPERIORE/INFERIORE DI UN INSIEME

$M \in R$ è un **MAGGIORANTE DI A** se $\forall\ a \in A$ si ha che $a \leq M$ L'insieme dei maggioranti di A si indica con **M(A)**	$m \in R$ è un **MINORANTE DI A** se $\forall\ a \in A$ si ha che $a \geq m$ L'insieme dei minoranti di A si indica con **m(A)**
Un insieme A si dice **LIMITATO SUPERIORMENTE** se esiste almeno un maggiorante di A	Un insieme A si dice **LIMITATO INFERIORMENTE** se esiste almeno un minorante di A
Un insieme A limitato superiormente ed inferiormente si dice **LIMITATO**	
$L \in R$ è il **MASSIMO DI A** se 1. L è un maggiorante di A 2. $L \in A$ (Il massimo di A, se esiste, è il più piccolo dei maggioranti di A)	$l \in R$ è il **MINIMO DI A** se 1. l è un minorante di A 2. $l \in A$ (Il minimo di A, se esiste, è il più grande dei maggioranti di A)
Si dimostra che se A è un insieme limitato superiormente, allora l'insieme dei maggioranti di A, M(A), ha minimo	Si dimostra che se A è un insieme limitato inferiormente, allora l'insieme dei minoranti di A, m(A), ha massimo
Sia A un insieme limitato superiormente. Si dice **ESTREMO SUPERIORE DI A** (*sup A*) il minimo dei maggioranti di A	Sia A un insieme limitato inferiormente. Si dice **ESTREMO INFERIORE DI A** (*inf A*) il massimo dei minoranti di A