LOGICA – ESERCIZI CON SOLUZIONI

1. Segnare a fianco se le seguenti frasi sono proposizioni in senso logico:
   - L'Inter gioca meglio del Milan — si **no**
   - I triangoli equilateri hanno i lati congruenti — **si** no
   - Voglio andare al mare — si **no**
   - Chissà quanto prenderò al prossimo compito — si **no**
   - Oggi vado al mare — **si** no
   - Dieci è minore di venti — **si** no
   - Dieci è maggiore di venti — **si** no
   - Il lago di Garda non è il più grande lago italiano — **si** no
   - Socrate è mortale — **si** no
   - Vincerò al Superenalotto? — si **no**

2. Date le seguenti proposizioni semplici:
   - p: "2 è un numero primo"
   - q: "2 è un numero pari"

   Costruire le proposizioni composte:

   $\neg p$ "2 non è un numero primo"

   $\neg q$ "2 non è un numero pari"

   $p \wedge q$ "2 è un numero primo e un numero pari"

   $p \vee q$ "2 è un numero primo o un numero pari"

   $p \rightarrow q$ "se 2 è un numero primo allora è un numero pari"

   $p \leftrightarrow q$ "2 è un numero primo se e solo se è un numero pari"

3. Dimostrare, con le tavole di verità, le seguenti equivalenze tra proposizioni composte:
   - $p \wedge q = q \wedge p$ (commutativa della congiunzione)

p	q	$p \wedge q$	$q \vee p$
V	V	V	V
V	F	F	F
F	V	F	F
F	F	F	F

- $(p \vee q) \vee r = p \vee (q \vee r)$ (associativa della disgiunzione)

p	q	r	$p \vee q$	$q \vee r$	$(p \vee q) \vee r$	$p \vee (q \vee r)$
V	V	V	V	V	V	V
V	V	F	V	V	V	V
V	F	V	V	V	V	V
V	F	F	V	F	V	V
F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	V	V	V	V
F	F	V	F	V	V	V
F	F	F	F	F	F	F

- $\neg(p \wedge q) = \neg p \vee \neg q$ (I legge di De Morgan)

p	q	$p \wedge q$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg(p \wedge q)$	$\neg p \vee \neg q$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	F	F	V	V	V
F	V	F	V	F	V	V
F	F	F	V	V	V	V

- $\neg(p \vee q) = \neg p \wedge \neg q$ (II legge di De Morgan)

p	q	$p \vee q$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p \wedge \neg q$
V	V	V	F	F	F	F
V	F	V	F	V	F	F
F	V	V	V	F	F	F
F	F	F	V	V	V	V

- $p \rightarrow q = \neg q \rightarrow \neg p$ (implicazione diretta e contronominale)

p	q	$\neg p$	$\neg q$	$p \rightarrow q$	$\neg q \rightarrow \neg p$
V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V

4. Dimostrare, con le tavole di verità, che le seguenti proposizioni sono tautologie:

- $(\neg p \rightarrow p) \rightarrow p$ (Consequentia Mirabilis)

p	$\neg p$	$\neg p \rightarrow p$	$(\neg p \rightarrow p) \rightarrow p$
V	F	V	V
F	V	F	V

- $(p \rightarrow q) \leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$ (Legge di Crisippo)

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$\neg(p \wedge \neg q)$	$(p \rightarrow q) \leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$
V	V	V	F	F	V	V
V	F	F	V	V	F	V
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	F	V	V

- $(p \rightarrow (q \wedge \neg q)) \rightarrow \neg p$ (Legge dell'assurdo)

p	q	¬ q	q∧ ¬ q	p→ (q∧ ¬ q)	¬ p	(p→ (q∧ ¬ q)) → ¬ p
V	V	F	F	F	F	V
V	F	V	F	F	F	V
F	V	F	F	V	V	V
F	F	V	F	V	V	V

5. Fare un esempio per ciascuna delle tre regole logiche: Modus Ponens, Modus Tollens, Sillogismo Ipotetico.
   - Modus Ponens

Se la retta r è la bisettrice del I e III quadrante allora ha equazione $y = x$
La retta r è la bisettrice del I e III quadrante
___
La retta r ha equazione $y = x$

   - Modus Tollens

Se la retta r è la bisettrice del I e III quadrante allora ha equazione $y = x$
La retta r non ha equazione $y = x$
___
La retta r non è la bisettrice del I e III quadrante

   - Sillogismo Ipotetico

Se la retta r è la bisettrice del I e III quadrante allora ha equazione $y = x$
Se la retta r ha equazione $y = x$ allora passa per l'origine degli assi
___
Se la retta r è la bisettrice del I e III quadrante allora passa per l'origine degli assi

6. Trasformare nel linguaggio naturale i seguenti predicati:
   - $\forall x \in N \; \exists y \in N : y = x + 1$

"Per ogni x appartenente all'insieme dei numeri naturali esiste un y appartenente all'insieme dei numeri naturali tale che y è uguale ad x più uno."

   - $\exists x \in N : \neg \exists y \in N : y = x - 1$

"Esiste un x appartenente all'insieme dei numeri naturali tale che non esiste un y appartenente all'insieme dei numeri naturali tale che y è uguale ad x meno uno."

   - $\forall a,b,c \in A \;\; a = b \wedge b = c \rightarrow a = c$

"Per ogni a, b, c appartenente all'insieme A se a è uguale a b e b è uguale a c allora a è uguale a c."

7. Trasformare nel linguaggio dei predicati le seguenti frasi date nel linguaggio naturale:

- Ogni numero intero ha un predecessore

$$\forall x \in Z\ \exists y \in Z : y = x - 1$$

- Per ogni frazione, con numeratore diverso da zero, esiste una frazione inversa.

$$\forall \frac{n}{m} \in Q, n \neq 0,\ \exists \frac{m}{n} \in Q$$

- Esiste un numero reale tale che il suo quadrato è due.

$$\exists x \in R : x^2 = 2$$