LOGICA

La logica nasce nell'antica Grecia ed in particolare possiamo far risalire il suo inizio al grande filosofo Aristotele (384 a.C. – 322 a.C.) che la tratta principalmente negli *Analitici I* e *Analitici II*, facenti parte di un complesso di scritti chiamati *Organon.*

Quella di Aristotele, definita logica classica, passando dal Medioevo dove viene sviluppata e studiata con grande intensità, rimane praticamente immutata fino al '800-inizi '900. In questo periodo subisce una trasformazione, ad opera di grandi matematici, quali Boole, Frege, Russell ed altri, diventando logica matematica. Quella che secondo Aristotele era lo studio delle forme di ragionamento del linguaggio comune, assume una accezione più restrittiva, diventando lo studio delle dimostrazioni, e in generale di tutte le forme di ragionamento di tipo matematico. L'oggetto dello studio è dunque la <u>forma</u> del ragionamento matematico, indipendentemente dal contenuto.

Attraverso esempi di tipo classico e matematico, noi studieremo tali forme di ragionamento.

LINGUAGGIO DELLE PROPOSIZIONI

Il linguaggio delle proposizioni (o linguaggio proposizionale) si occupa delle proposizioni. Le proposizioni di cui tratteremo hanno un valore ristretto rispetto a quelle del linguaggio comune.

Definizione: una **proposizione semplice** è una frase della quale si possa dire se è vera o falsa.

Per prima cosa abbiamo posposto al termine "proposizione" il termine "semplice": questo per distinguerle da quelle "composte" che tratteremo più avanti. Il termine "frase" sta ad indicare che deve seguire le regole della sintassi e della semantica della lingua, quindi deve essere una sequenza di parole del vocabolario dotate di senso. Il punto caratterizzante della definizione è il poter stabilire se l'enunciato espresso dalla proposizione è vero o falso. Questo deve essere possibile stabilirlo con certezza, senza ambiguità. Inoltre non sono ammesse terze possibilità, come: "forse", "abbastanza", ecc.

Facciamo degli esempi:

Frasi che <u>non sono</u> proposizioni semplici:

- Oggi pioverà?

- Chissà se oggi avrò la febbre.
- Speriamo di vincere il campionato!
- Studia!
- E’ possibile che non riesca a risolvere le disequazioni

Ovviamente sono da escludere tutte le frasi che non sono ben formate.

Frasi che <u>sono</u> proposizioni semplici:

- Oggi piove
- 3 = 3
- 5 < 0
- Domani è il mio compleanno
- Karl Weierstrass è un matematico
- Il Sole è una stella blu

Di tutte queste frasi possiamo dire, con certezza, se sono vere o false.

Al posto delle proposizioni semplici, useremo delle **variabili proposizionali**. Le variabili proposizionali possono essere pensate, facendo un parallelismo con il linguaggio algebrico, come lettere al cui interno si mettono via via dei numeri. Per esempio, se vogliamo indicare la formula dell’area di un rettangolo scriveremo: A=bxh. Le lettere “b” ed “h” saranno sostituite, di volta in volta, dai numeri che il problema ci fornisce. Analogamente dentro le variabili proposizionali, che indicheremo con a,b,c,...p,q,.... dobbiamo pensarci delle proposizioni specifiche, come quelle elencate sopra.

Le proposizione semplici possono essere composte tra di loro, esattamente come in algebra le lettere (o numeri) vengono composte tra di loro con le operazioni. In logica gli equivalenti delle operazioni si chiamano **connettivi logici**. Prima di vederli nel dettaglio diamo una nuova definizione.

Definizione: una **proposizione composta** è un insieme di proposizioni semplici legate tra loro da connettivi logici.

I **connettivi logici** sono:

$\neg$ (negazione)

$\wedge$ (congiunzione),

$\vee$ (disgiunzione),

$\rightarrow$ (implicazione),

$\leftrightarrow$ (doppia implicazione).

I simboli per rappresentare i connettivi logici sono variati attraverso gli anni ed anche oggi non c'è uniformità in tutti gli ambiti. Per esempio il simbolo di negazione si può rappresentare così: $\neg p$, $\sim p$, $\overline{p}$. Anche nei linguaggi di programmazione e negli applicativi per pc c'è una grande difformità di simboli.

L'ordine in cui sono stati elencati è anche l'ordine di esecuzione nel caso in cui in una proposizione composta ne siano presenti due o più: esattamente come accade per l'ordine di esecuzione delle operazioni tra numeri. Nel caso siano presenti parentesi, le operazioni dentro di queste devono essere eseguite per prime.

Per definire i connettivi logici usiamo un formalismo grafico chiamato **tavola di verità**. Questa non è altro che una tabella nelle cui colonne vengono riportate le variabili proposizionali, semplici e composte, e nelle corrispondenti righe i valori di verità Vero o Falso (in genere abbreviato V, F oppure T(rue), F(alse) oppure 1, 0).

Adesso andremo ad analizzare, in modo schematico i connettivi logici, definendoli tramite le tavole di verità e fornendo degli esempi.

$\neg$ (**negazione**) $\neg$ p si legge "**non** p"

p	$\neg$ p
V	F
F	V

Esempi:
p: "13 è un numero primo"
$\neg$ p: "13 non è un numero primo"

p: "Giuseppe va in montagna"
$\neg$ p: "Giuseppe non va in montagna"

$\wedge$ (**congiunzione**) $p \wedge q$ si legge "p **e** q"

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Esempi:
p: "13 è un numero primo"
q: "13 è un numero dispari"
$p \wedge q$ "13 è un numero primo e 13 è un numero dispari" oppure "13 è un numero primo e dispari"

p: "Giuseppe va in montagna"
q: "Giuseppe prende la funivia"
$p \wedge q$ "Giuseppe va in montagna e prende la funivia"

$\vee$ (**disgiunzione**) $p \vee q$ si legge "p **o** q"

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Esempi:
p: "x è minore di 3"
q: "x è maggiore di 5"
$p \vee q$ "x è minore di 3 o maggiore di 5"

p: "Giuseppe va in montagna"
q: "Giuseppe va in Trentino"
$p \vee q$ "Giuseppe va in montagna o in Trentino"

$\rightarrow$ (**implicazione**)

$p \rightarrow q$ si legge "p **implica** q" oppure "**se** p **allora** q"
"p è condizione **sufficiente** per q" oppure "q è condizione **necessaria** per p"
p si chiama **antecedente** oppure **premessa** oppure **ipotesi**
q si chiama **conseguente** oppure **conclusione** oppure **tesi**

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Esempi:
p: "R è un quadrato"
q: "R è un rettangolo"
$p \rightarrow q$ "Se R è un quadrato, allora è un rettangolo"

p: "Il Sole risplende"
q: "Giuseppe va in montagna"
$p \rightarrow q$ "Se il Sole risplende allora Giuseppe va in montagna" oppure "il Sole risplende implica che Giuseppe va in montagna"

$\leftrightarrow$ (**doppia implicazione**)

$p \leftrightarrow q$ si legge "p **implica** q **e viceversa**" oppure "p **se e solo se** q" oppure "p è condizione **necessaria e sufficiente** per q"
(**se e solo se** si può sintetizzare con **sse**)

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Esempi:
p: "R è un rombo"
q: "R è un quadrilatero con quattro lati congruenti"
$p \leftrightarrow q$ "R è un rombo se e solo se è un quadrilatero con quattro lati congruenti"

p: "Giuseppe va in montagna"
q: "Il Sole risplende"
$p \leftrightarrow q$ "Condizione necessaria e sufficiente affinché Giuseppe vada in montagna è che il Sole risplenda" oppure "Giuseppe va in montagna se e solo se il Sole risplende"

A questi connettivi se ne può aggiungere un altro chiamato "o esclusivo", simboleggiato da $\dot{\vee}$, la cui tavola di verità è la negazione della doppia implicazione. L'<u>o esclusivo</u> $\dot{\vee}$ (in latino "aut"), si contrappone all'<u>o inclusivo</u> $\vee$ (in latino "vel").

Tra tutte le proposizioni composte alcune hanno caratteristiche particolari, per esempio quelle sempre Vere o sempre False.

Definizione: Una **tautologia** è una proposizione composta la cui tavola di verità ha sempre valore Vero, indipendentemente dal valore di verità delle proposizioni semplici da cui è formata.

Definizione: Una **contraddizione** è una proposizione composta la cui tavola di verità ha sempre valore Falso, indipendentemente dal valore di verità delle proposizioni semplici da cui è formata.

Esempio:

p	$\neg p$	$p \vee \neg p$	$p \wedge \neg p$
V	F	V	F
F	V	V	F

$p \vee \neg p$ è una tautologia (la proposizione $p \vee \neg p$ si chiama **Principio del terzo escluso**)
$p \wedge \neg p$ è una contraddizione (la proposizione $p \wedge \neg p$ si chiama **Principio di non contraddizione**)

Diamo adesso un'altra definizione.

Definizione: Due proposizioni si dicono **equivalenti** se hanno la stessa tavola di verità

Esempio:

p	q	$\neg p$	$p \to q$	$\neg p \vee q$
V	V	F	V	V
V	F	F	F	F
F	V	V	V	V
F	F	V	V	V

Le proposizioni $p \to q$ e $\neg p \vee q$ sono equivalenti perché hanno la stessa tavola di verità.

L'implicazione

Date le proposizioni p e q si definiscono le seguenti implicazioni:

$p \to q$	implicazione **diretta**
$q \to p$	implicazione **inversa**
$\neg p \to \neg q$	implicazione **contraria**
$\neg q \to \neg p$	implicazione **contronominale**

L'implicazione diretta e contronominale sono equivalenti (così come l'inversa e la contraria, dato che sono una la contronominale dell'altra). Provare a dimostrare l'asserto.

Esempio:

$p \to q$: Se una funzione è derivabile allora è anche continua

$\neg q \to \neg p$ Se una funzione non è continua allora non è neppure derivabile

Le regole Logiche

Nelle dimostrazioni matematiche è necessario effettuare una serie di passaggi deduttivi da proposizioni che assumiamo Vere, come assiomi, definizioni, teoremi precedentemente dimostrati, ipotesi, a proposizioni di cui non sappiamo il valore di verità, ma ne vogliamo stabilire, alla fine, la veridicità. Queste proposizioni finali vengono chiamate Tesi (molto spesso la tesi è unica). Affinché questa catena di passaggi tra proposizioni conservi il valore di verità è necessario che seguano certe regole, chiamate regole logiche (o deduzioni valide, o regole deduttive).

Diamo allora le seguenti definizioni.

Definizione: Una **regola** è una relazione tra proposizioni esprimibile nella forma:

$$\frac{\begin{array}{c} p_1 \\ . \\ . \\ p_n \end{array}}{q}$$

dove $p_1,\dots,p_n$ vengono dette premesse e q conclusione

Definizione: Una regola si dice **regola logica** se $(p_1 \wedge \dots \wedge p_n) \to q$ è una tautologia

Ricapitolando possiamo dire che le regole logiche sono le uniche regole consentite nella logica matematica come forme di ragionamento valide. Solo esse, infatti, permettono di trasmettere l'eventuale verità delle premesse alla conclusione.

Alcune regole logiche:

Modus Ponens:

$$\frac{\begin{array}{c} p \to q \\ p \end{array}}{q}$$

Esempio:

Se il triangolo T è isoscele allora ha gli angoli alla base congruenti
T è isoscele
―――――――――――――――――
T ha gli angoli alla base congruenti

Modus Tollens:

$$\frac{\begin{array}{c} p \to q \\ \neg q \end{array}}{\neg p}$$

Esempio:

Se il triangolo T è isoscele allora ha gli angoli alla base congruenti
T non ha gli angoli alla base congruenti
―――――――――――――――――
T non è isoscele

Sillogismo ipotetico:

$$\begin{array}{l} p \rightarrow q \\ q \rightarrow r \\ \hline p \rightarrow r \end{array}$$

Esempio:

Se il triangolo T è isoscele allora ha gli angoli alla base congruenti
Se T ha gli angoli alla base congruenti allora la bisettrice coincide con l'altezza
______
Se T è isoscele allora la bisettrice coincide con l'altezza

Costruzione di una tavola di verità

Ci proponiamo adesso di costruire una tavola di verità per effettuare una dimostrazione logica. Supponiamo di voler verificare che il Modus Tollens è una regola logica. Per far questo dovremo prendere due variabili proposizionali: p,q ed assegnare loro i valori di verità V o F, creando tutte le combinazioni possibili:

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

La proposizione composta finale, di cui dovremo esaminare la tavola di verità è: $((p \rightarrow q) \wedge \neg q) \rightarrow \neg p$.

Costruiamo le varie componenti della proposizione, evidenziando, di volta in volta, le colonne coinvolte:

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg q$
V	V	V	F
V	F	F	V
F	V	V	F
F	F	V	V

p	q	$p \rightarrow q$	$\neg q$	$(p \rightarrow q) \wedge \neg q$
V	V	V	F	F
V	F	F	V	F
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

p	q	$p\rightarrow q$	$\neg q$	$(p\rightarrow q)\wedge\neg q$	$\neg p$
V	V	V	F	F	F
V	F	F	V	F	F
F	V	V	F	F	V
F	F	V	V	V	V

p	q	$p\rightarrow q$	$\neg q$	$(p\rightarrow q)\wedge\neg q$	$\neg p$	$((p\rightarrow q)\wedge\neg q)\rightarrow\neg p$
V	V	V	F	F	F	V
V	F	F	V	F	F	V
F	V	V	F	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V

Poiché l'ultima colonna, che è la tavola di verità della proposizione che volevamo dimostrare, contiene tutti V, possiamo concludere che è una tautologia e quindi il Modus Tollens è una regola logica

Osservazione:

- Provare a partire da 3 variabili proposizionali: quante combinazioni di V-F si ottengono? Quale è la legge che regola il numero di variabili proposizionali con il numero di combinazioni possibili?

LINGUAGGIO DEI PREDICATI

Il linguaggio proposizionale risulta troppo povero per formalizzare alcuni enunciati; ad esempio in tale linguaggio non possiamo esprimere enunciati contenenti espressioni del tipo "esiste almeno un ", esiste uno ed uno solo", "tutti gli elementi di", "per ogni". Introduciamo allora un nuovo linguaggio, simile al precedente, ma più ricco, contenente due quantificatori:

Quantificatore Universale si simboleggia con $\forall$ e si legge "per ogni"
Quantificatore Esistenziale si simboleggia con $\exists$ e si legge "esiste" ("almeno uno")

Esempi:

La scrittura $\forall x\ P(x)$ si legge "per ogni x p di x" e significa "ogni elemento x gode della proprietà P" (ad esempio "ogni numero intero ha un predecessore")

La scrittura $\exists x\ P(x)$ si legge “esiste un x tale che p di x” e significa “esiste un elemento x che gode della proprietà P” (ad esempio “esiste un numero primo che è pari”, in questo caso ne esiste uno solo, ma il quantificatore sottintende almeno uno)

I due quantificatori sono intercambiabili seguendo le seguenti regole:

$\forall x\ P(x)$ equivale a: $\neg \exists x \neg P(x)$

$\exists x\ P(x)$ equivale a: $\neg \forall x \neg P(x)$

Esempi:

“ogni numero intero ha un predecessore” equivale a “non esiste nessun intero che non abbia predecessore”

“esiste un numero primo che è pari” equivale a “non tutti i numeri primi non sono pari (cioè dispari)”