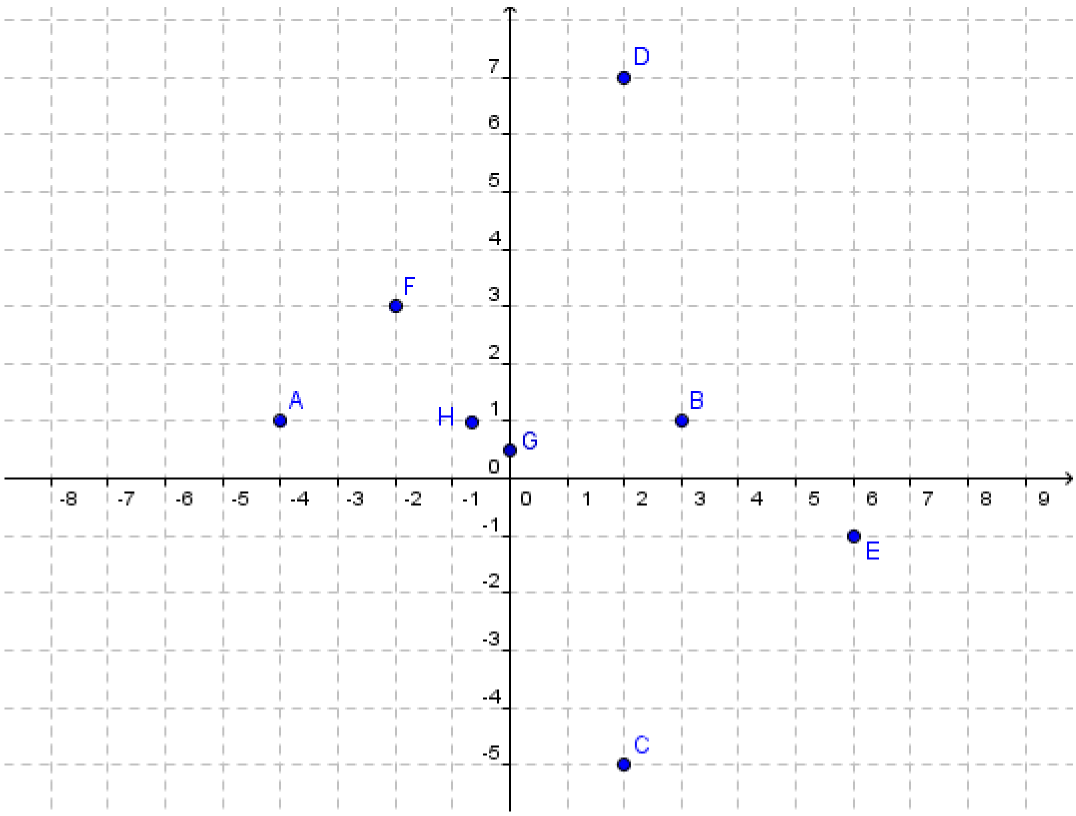
GEOMETRIA ANALITICA – ESERCIZI CON SOLUZIONI

1. Posizionare nel piano cartesiano e calcolare la distanza delle seguenti coppie di punti:



a. $A(-4,1)$ e $B(3,1)$

I due punti hanno la stessa ordinata, quindi possiamo usare la formula:

$$\overline{AB} = |x_B - x_A| = |3 - (-4)| = |3 + 4| = |7| = 7$$

b. $C(2,-5)$ e $D(2,7)$

I due punti hanno la stessa ascissa, quindi possiamo usare la formula:

$$\overline{CD} = |y_D - y_C| = |7 - (-5)| = |7 + 5| = |12| = 12$$

c. $E(6,-1)$ e $F(-2,3)$

I due punti non hanno né stessa ascissa né stessa ordinata, quindi dobbiamo usare la formula generale:

$$\overline{EF} = \sqrt{(x_F - x_E)^2 + (y_F - y_E)^2} = \sqrt{(-2-6)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{(-8)^2 + 4^2} = \sqrt{64 + 16} = \sqrt{80}$$

d. $G\left(0,\frac{1}{2}\right)$ e $H\left(-\frac{2}{3},1\right)$

Anche in questo caso dobbiamo usare la formula generale:

$$\overline{GH} = \sqrt{(x_H - x_G)^2 + (y_H - y_G)^2} = \sqrt{\left(-\frac{2}{3} - 0\right)^2 + \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} =$$

$$= \sqrt{\frac{4}{9} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{16+9}{36}} = \sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{5}{6}$$

2. Calcolare le coordinate del punto medio del segmento di estremi le coppie dei punti dell'esercizio precedente.

a. $A(-4,1)$ e $B(3,1)$

$$x_M = \frac{x_A + x_B}{2} = \frac{-4+3}{2} = -\frac{1}{2} \qquad y_M = \frac{y_A + y_B}{2} = \frac{1+1}{2} = \frac{2}{2} = 1 \qquad M\left(-\frac{1}{2},1\right)$$

b. $C(2,-5)$ e $D(2,7)$

$$x_M = \frac{x_C + x_D}{2} = \frac{2+2}{2} = \frac{4}{2} = 2 \qquad y_M = \frac{y_C + y_D}{2} = \frac{-5+7}{2} = \frac{2}{2} = 1 \qquad M(2,1)$$

c. $E(6,-1)$ e $F(-2,3)$

$$x_M = \frac{x_E + x_F}{2} = \frac{6-2}{2} = \frac{4}{2} = 2 \qquad y_M = \frac{y_E + y_F}{2} = \frac{-1+3}{2} = \frac{2}{2} = 1 \qquad M(2,1)$$

d. $G\left(0,\frac{1}{2}\right)$ e $H\left(-\frac{2}{3},1\right)$

$$x_M = \frac{x_G + x_H}{2} = \frac{0 - \frac{2}{3}}{2} = \frac{-\frac{2}{3}}{2} = -\frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}$$

$$y_M = \frac{y_G + y_H}{2} = \frac{\frac{1}{2} + 1}{2} = \frac{\frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{3}{4} \qquad M\left(-\frac{1}{3},\frac{3}{4}\right)$$

3. Disegnare nel piano cartesiano le rette di equazione:

a. $x = 2$

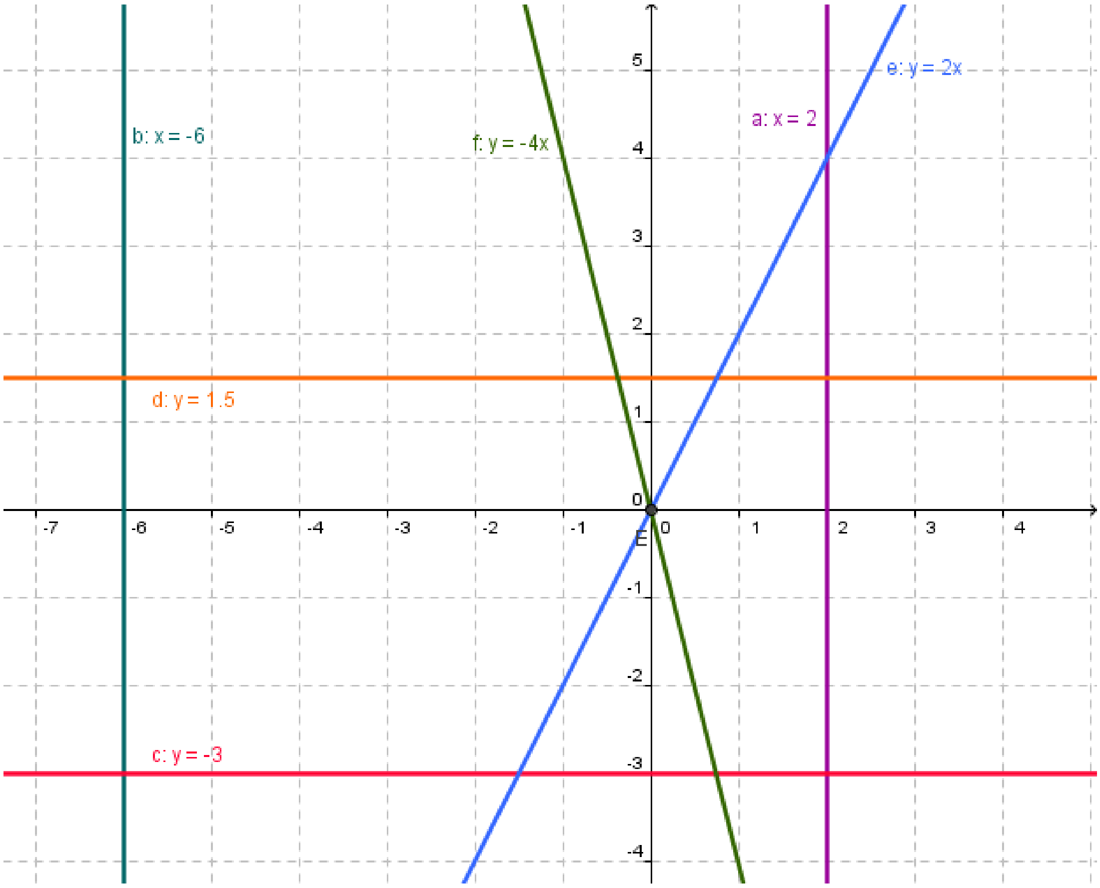
b. $x = -6$

c. $y = -3$

d. $y = \frac{3}{2}$

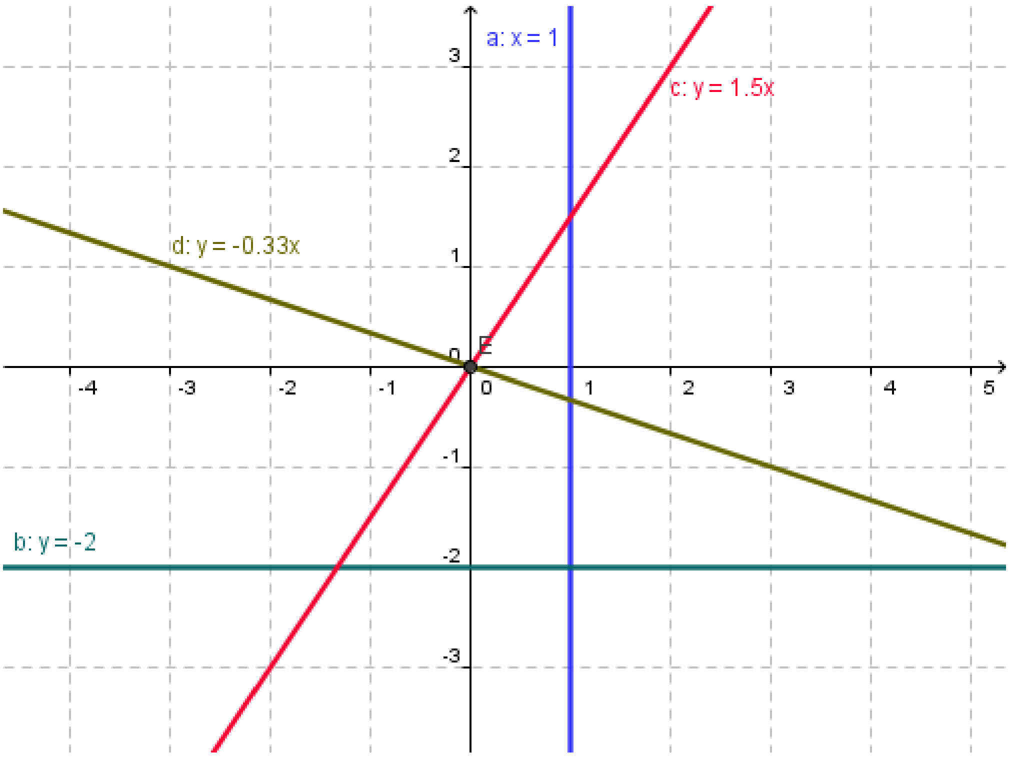
e. $y = 2x$

f. $y = -4x$



4. Dato il grafico in figura, trovare le equazioni delle rette:

   Vedi risoluzione in figura



5. Disegnare le rette di equazione:
   a. $y = -3x + 2$
   b. $y = 2x - 1$

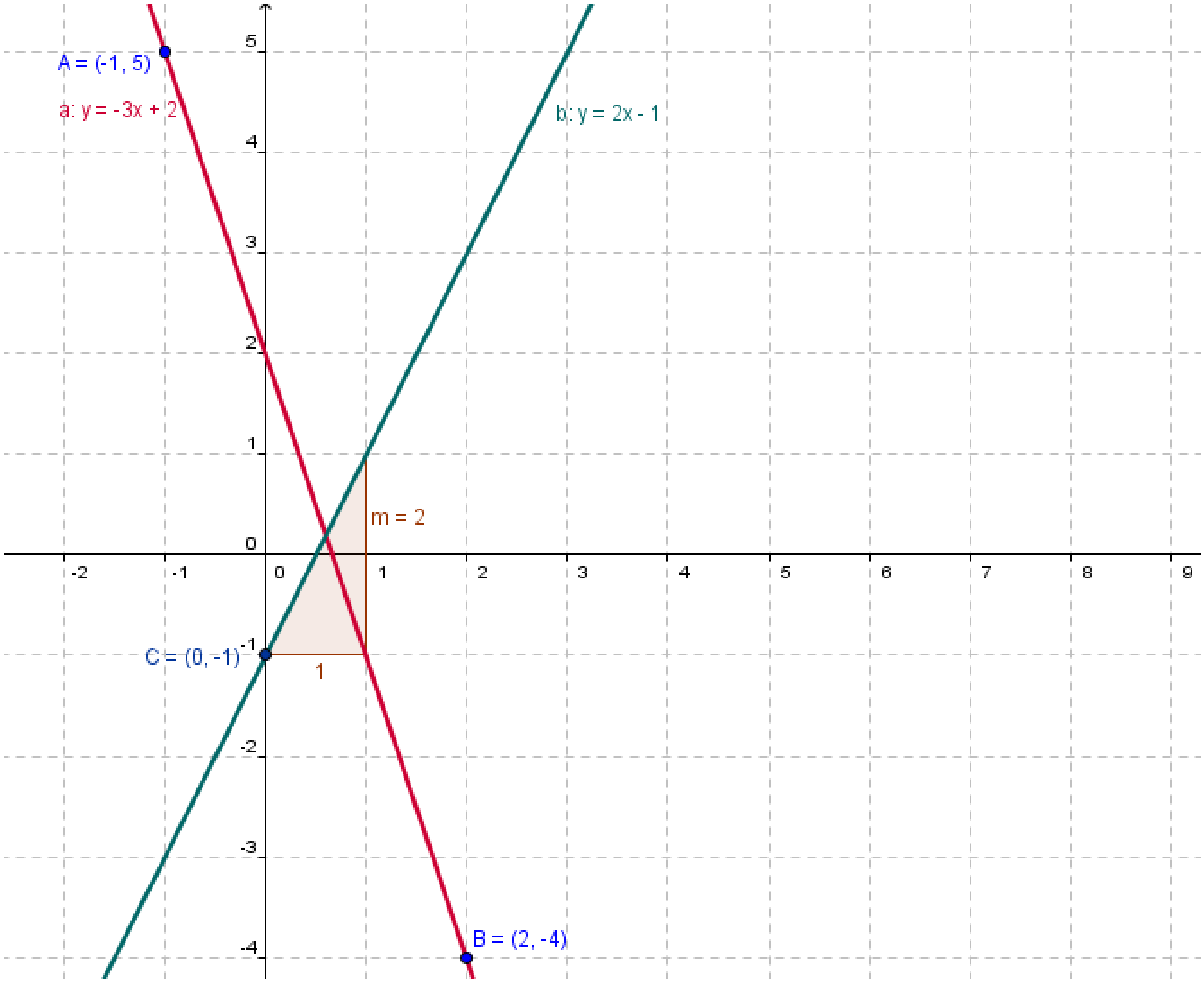
   Per disegnare una retta nel piano cartesiano possiamo seguire due strade: la prima consiste nell'attribuire minimo due valori arbitrari alla x (variabile indipendente) e calcolare, tramite l'equazione, il corrispondente valore della y (variabile dipendente). La seconda strada fa uso della conoscenza del coefficiente angolare e dell'ordinata all'origine che si ricavano dall'equazione. Useremo la prima strada per la retta a. e la seconda strada per la retta b.

   a. Per disegnare la retta di equazione $y = -3x + 2$ costruiamo la tabella:

x	y
-1	5
2	-4

   I valori di x (-1 e 2) sono stati scelti a caso, considerando però il fatto che è conveniente prendere numeri "piccoli" ed interi per semplificare i calcoli. I corrispondenti valori della y sono stati trovati sostituendo prima il -1 ($y = -3 \cdot (-1) + 2 = 5$) e poi il 2 ($y = -3 \cdot 2 + 2 = -4$). I valori della tabella non sono altro che le coordinate di due punti che appartengono alla retta cercata: $A(-1,5)$ e $B(2,-4)$

   b. Per disegnare la retta di equazione $y = 2x - 1$ consideriamo il fatto che l'ordinata all'origine vale -1, dunque, per definizione di ordinata all'origine, sappiamo che la retta passa per il punto $Q(0,-1)$. Inoltre il coefficiente angolare vale 2, questo vuol dire, per definizione di coefficiente angolare, che il rapporto tra la differenza delle ordinate e delle ascisse di due punti qualsiasi è sempre uguale a 2. In pratica possiamo dire che se mi muovo di una unità sulla destra nell'asse delle ascisse, mi devo muovere di 2 unità verso l'alto sull'asse delle ordinate. Nella figura è evidenziato il procedimento.



6. Scrivere in forma <u>implicita</u> le seguenti equazioni di rette:

   a. $y = 2x - 1$

      $-2x + y + 1 = 0$

   b. $y = -3x + 2$

      $+3x + y - 2 = 0$

7. Scrivere in forma <u>esplicita</u> le seguenti equazioni di rette:

   a. $3x + y - 1 = 0$

      $y = -3x + 1$

   b. $-3x - 7y + 2 = 0$

      $-7y = 3x - 2 \qquad y = \frac{3}{-7}x - \frac{2}{-7} \qquad y = -\frac{3}{7}x + \frac{2}{7}$

8. Calcolare il coefficiente angolare della retta passante per i punti:
   a. $A(-4,1)$ e $B(3,2)$

   Per definizione di coefficiente angolare sappiamo che $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$ da cui si ha:

   $m = \frac{2-1}{3-(-4)} = \frac{1}{3+4} = \frac{1}{7}$

9. Per ciascuna retta scrivere una retta parallela ed una perpendicolare:
   a. $y = \frac{2}{5}x - 1$

   Retta parallela $y = \frac{2}{5}x + 50$, retta perpendicolare $y = -\frac{5}{2}x - 123$

   b. $y = -3x + 2$

   Retta parallela $y = -3x - \frac{4}{5}$, retta perpendicolare $y = \frac{1}{3}x + 1777$

10. Scrivere l'equazione del fascio <u>proprio</u> di rette passanti per il punto $P(-4,3)$.

Dall'equazione $y - y_P = m(x - x_P) \cup x = x_P$ si ha:

$y - 3 = m(x - (-4)) \quad y = m(x + 4) + 3 \qquad y = mx + 4m + 3 \cup x = -4$

11. Scrivere l'equazione del fascio <u>improprio</u> di rette parallele alla retta $y = \frac{2}{3}x - 1$.

Dall'equazione $y = mx + k$ si ha: $y = \frac{2}{3}x + k$

12. Scrivere l'equazione della retta passante per ciascuna coppia di punti:
    a. $A(-6,1)$ e $B(-2,3)$
    b. $C\left(0,\frac{1}{2}\right)$ e $D\left(-\frac{2}{3},1\right)$

    Facciamo uso della formula: $\frac{x - x_A}{x_B - x_A} = \frac{y - y_A}{y_B - y_A}$

a. $\frac{x-(-6)}{-2-(-6)}=\frac{y-1}{3-1}$ $\quad \frac{x+6}{4}=\frac{y-1}{2}$ $\quad \frac{x+6}{4}=\frac{2(y-1)}{4}$ $\quad x+6=2y-2$

$x+6+2=2y$ $\quad x+8=2y$ $\quad y=\frac{1}{2}x+4$

b. $\frac{x-0}{-\frac{2}{3}-0}=\frac{y-\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{2}}$ $\quad \frac{x}{-\frac{2}{3}}=\frac{\frac{2y-1}{2}}{\frac{1}{2}}$ $\quad x\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{2y-1}{2}\cdot 2$

$-\frac{3}{2}x=2y-1$ $\quad -\frac{3}{2}x+1=2y$ $\quad y=-\frac{3}{4}x+\frac{1}{2}$

13. Calcolare la distanza tra il punto $P(-4,3)$ e la retta r di equazione $3x+y-1=0$

Si applica la formula:

$$d(P,r)=\frac{|ax_P+by_P+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|3\cdot(-4)+1\cdot 3+(-1)|}{\sqrt{3^2+1^2}}=\frac{|-12+3-1|}{\sqrt{9+1}}=\frac{|-10|}{\sqrt{10}}=\frac{10}{\sqrt{10}}=\sqrt{10}$$

14. Risolvere i seguenti problemi:

a. *Trovare l'equazione della retta passante per il punto* $A(0,-1)$ *e parallela alla retta di equazione* $y=\frac{2}{5}x+8$.

Uno dei metodi per risolvere il problema è questo: si trova l'equazione del fascio proprio di rette passanti per A e poi si sceglie la retta del fascio con coefficiente angolare uguale a $\frac{2}{5}$:

Fascio proprio per A: $y-(-1)=m(x-0)$ $\quad y+1=mx$ $\quad y=mx-1$

Basta sostituire al coefficiente angolare m il valore $\frac{2}{5}$ ed otteniamo: $y=\frac{2}{5}x-1$ che è la retta cercata.

Un altro metodo è quello di trovare l'equazione del fascio improprio di rette parallele a $y=\frac{2}{5}x+8$ e poi calcolare l'equazione della retta del fascio che passa per A.

b. *Trovare l'equazione della retta passante per l'origine degli assi e perpendicolare alla retta passante per i punti* $A(-4,1)$ e $B(3,2)$.

Per prima cosa si calcola l'equazione della retta passante per i punti A e B:

$$\frac{x-(-4)}{3-(-4)}=\frac{y-1}{2-1} \qquad \frac{x+4}{7}=\frac{y-1}{1} \qquad y=\frac{1}{7}x+\frac{4}{7}+1 \qquad y=\frac{1}{7}x+\frac{11}{7}$$

Poiché la retta cercata è perpendicolare alla retta trovata, avrà coefficiente angolare $m=-7$ e poiché passa per l'origine degli assi ha $q=0$. L'equazione è dunque: $y=-7x$.