ESPONENZIALI E LOGARITMI – ESERCIZI CON SOLUZIONI

1. Stabilire se le seguenti scritture sono logaritmi validi, in base alla definizione:
   a. $\log_2 3$ sì
   b. $\log_0 6$ no, la base non può essere 0
   c. $\log_{-7} \frac{1}{2}$ no, la base non può essere un numero negativo
   d. $\log_2 -8$ no, l'argomento non può essere negativo
   e. $\log_1 3$ no, la base non può essere 1
   f. $\log 3$ sì (logaritmo in base 10)
   g. $\log_2 0$ no, l'argomento non può essere 0

2. Calcolare il valore dei seguenti logaritmi applicando la definizione:
   a. $\log_2 16 = 4$
   b. $\log 10^7 = 7$
   c. $\log \frac{1}{1000} = -3$
   d. $\log_{\frac{1}{3}} 9 = -2$
   e. $\ln 1 = 0$
   f. $\log_2 \sqrt{8} = \frac{3}{2}$
   g. $\log_7 7 = 1$
   h. $\log_2 \frac{1}{32} = -4$

3. Calcolare il valore dei seguenti logaritmi applicando la formula del cambiamento di base:
   a. $\log_3 78 = \frac{\log 78}{\log 3} = \frac{1{,}89}{0{,}48} = 3{,}94$
   b. $\log_{\frac{2}{5}} \frac{5}{2} = \frac{\ln \frac{5}{2}}{\ln \frac{2}{5}} = \frac{0{,}92}{-0{,}92} = -1$

4. Applicare le proprietà dei logaritmi alle seguenti espressioni:

a. $\log_5 7 - \log_5 2 = \log_5 \frac{7}{2}$

b. $\log_4 7 + \log_4 2 = \log_4 (7 \cdot 2) = \log_4 14$

c. $2 \cdot \log 7 = \log 7^2 = \log 49$

5. Calcolare le seguenti **equazioni esponenziali**

1) $\boxed{5^{x-2} = 5^{1-3x}}$

SI PASSA AGLI ESPONENTI:

$x - 2 = 1 - 3x$

SI RISOLVE L'EQUAZIONE.

$x + 3x = 1 + 2$

$4x = 3$

$\boxed{x = \frac{3}{4}}$

2) $\boxed{2^x = 8 \cdot \sqrt{2}}$

L'EQUAZIONE NON È IN FORMA NORMALE, SI APPLICANO LE PROPRIETÀ DELLE POTENZE PER RIDURRE IL SECONDO MEMBRO AD UNA POTENZA DEL 2:

$2^x = 2^3 \cdot 2^{\frac{1}{2}}$

$2^x = 2^{3+\frac{1}{2}}$

$2^x = 2^{\frac{7}{2}}$

ADESSO POSSIAMO PASSARE AGLI ESPONENTI:

$\boxed{x = \frac{7}{2}}$ IN QUESTO CASO L'EQUAZIONE ALGEBRICA È GIÀ RISOLTA

3) $\boxed{3^{2x} - 10 \cdot 3^x = -9}$

SI PONE $3^x = t$. t È UNA VARIABILE AUSILIARIA.

OPERANDO TALE SOSTITUZIONE, L'EQUAZIONE DI PARTENZA DIVENTA; (CONSIDERANDO CHE $3^{2x} = (3^x)^2$):

$t^2 - 10t = -9$

QUESTA È UNA EQUAZIONE DI 2° GRADO NELL'INCOGNITA t.
RISOLVIAMOLA:

$t^2 - 10t + 9 = 0$

$$t = \frac{10 \pm \sqrt{100-36}}{2} = \frac{10 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{10 \pm 8}{2} = \begin{cases} t_1 = \frac{18}{2} = 9 \\ t_2 = \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

ADESSO RISOSTITUIAMO:

PER $t_1 = 9$ SI HA: $3^x = 9$ DA CUI $3^x = 3^2 \rightarrow \boxed{x = 2}$

PER $t_2 = 1$ SI HA: $3^x = 1$ DA CUI $3^x = 3^0 \rightarrow \boxed{x = 0}$

4) $\boxed{7^x - 49 \cdot 7^{-x-1} = 6}$

SI APPLICANO LE PROPRIETÀ DELLE POTENZE:

$$7^x - \frac{49}{7^{x+1}} = 6 \rightarrow 7^x - \frac{49}{7 \cdot 7^x} = 6 \rightarrow 7^x - \frac{7}{7^x} = 6$$

SI PONE $7^x = t$, L'EQUAZIONE DIVENTA: $t - \frac{7}{t} = 6$

DA CUI: $t^2 - 7 = 6t \rightarrow t^2 - 6t - 7 = 0$

$$t = \frac{6 \pm \sqrt{36+28}}{2} = \frac{6 \pm \sqrt{64}}{2} = \frac{6 \pm 8}{2} = \begin{cases} t_1 = 7 \\ t_2 = -1 \end{cases}$$

RISOSTITUENDO SI HA:

PER $t_1 = 7$: $7^x = 7$ DA CUI $\boxed{x = 1}$

PER $t_2 = -1$: $7^x = -1$ QUESTA È IMPOSSIBILE, PERCHÈ PER NESSUN VALORE DI x UN ESPONENZIALE È NEGATIVO.

6. Calcolare le seguenti **disequazioni esponenziali**

1) $\boxed{7^{2x+3} < 7^{x-4}}$

SI PASSA AGLI ESPONENTI, MANTENENDO IL VERSO DELLA DISEQUAZIONE

$2x+3 < x-4$

SI RISOLVE LA DISEQUAZIONE:

$2x-x < -4-3$

$\boxed{x < -7}$

2) $\boxed{\left(\frac{1}{2}\right)^{1-3x} < \left(\frac{1}{2}\right)^{5-4x}}$

SI PASSA AGLI ESPONENTI, CAMBIANDO IL VERSO DELLA DISEQUAZIONE, POICHÈ LA BASE, CIOÈ $\frac{1}{2}$, È COMPRESA TRA 0 ED 1.

$1-3x > 5-4x$

$4x-3x > 5-1$

$\boxed{x > 4}$

3) $\boxed{\left(\frac{2}{3}\right)^{x} \geq \frac{27}{8}}$

PRIMA SI RIDUCE IL SECONDO MEMBRO AD UNA POTENZA DI $\frac{2}{3}$:

$\left(\frac{2}{3}\right)^{x} \geq \frac{3^3}{2^3} \rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{x} \geq \left(\frac{3}{2}\right)^{3} \rightarrow \left(\frac{2}{3}\right)^{x} \geq \left(\frac{2}{3}\right)^{-3}$

ADESSO SI PASSA AGLI ESPONENTI (TENENDO CONTO CHE $\frac{2}{3}$ È COMPRESO TRA 0 ED 1):

$\boxed{x \leq -3}$

4) $\boxed{5^{x-2} \leq 1}$

RICORDANDO, DALLE PROPRIETÀ DELLE POTENZE, CHE $a^0 = 1$,
SI HA:

$5^{x-2} \leq 5^0$, POICHÈ LA BASE È MAGGIORE DI 1, SI HA:

$x - 2 \leq 0$

$\boxed{x \leq 2}$

5) $\boxed{6^x < 0}$

RICORDANDO CHE UN ESPONENZIALE NON È MAI MINORE O UGUALE A 0, POSSIAMO SUBITO CONCLUDERE CHE LA DISEQUAZIONE È <u>IMPOSSIBILE</u>. $(S = \emptyset)$

6) $\boxed{8^x > 0}$

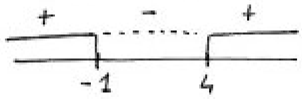
PER LO STESSO MOTIVO, POSSIAMO DIRE CHE QUESTA DISEQUAZIONE È <u>SEMPRE</u> VERIFICATA $(S = \mathbb{R})$

7) $\boxed{\frac{2^{2x}}{3} - 2^x > \frac{4}{3}}$

$\frac{2^{2x} - 3 \cdot 2^x}{\cancel{3}} > \frac{4}{\cancel{3}} \rightarrow 2^{2x} - 3 \cdot 2^x - 4 > 0$ SI PONE $2^x = t$:

$t^2 - 3t - 4 > 0$, SI RISOLVE L'EQUAZIONE ASSOCIATA: $t^2 - 3t - 4 = 0$

$t = \frac{3 \pm \sqrt{9+16}}{2} = \frac{3 \pm 5}{2} = \begin{cases} t_1 = 4 \\ t_2 = -1 \end{cases}$



SOLUZIONE DELLA DISEQUAZIONE (IN t): $t < -1 \vee t > 4$

RISOSTITUENDO SI HANNO DUE DISEQUAZIONI (IN x):

$2^x < -1$ MAI VERIFICATA $(\emptyset)$

$\cup$ SOLUZIONE FINALE: $\boxed{x > 2}$

$2^x > 4 \rightarrow 2^x > 2^2 \rightarrow x > 2$

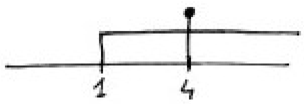
7. Calcolare le seguenti **equazioni logaritmiche**

1) $\boxed{\log_2(x-1) = \log_2 3}$

POICHÉ ABBIAMO UN UNICO LOGARITMO NELLA STESSA BASE AI DUE MEMBRI, POSSIAMO PASSARE AGLI ARGOMENTI $(x-1=3)$.
DOBBIAMO POI METTERE A SISTEMA LA CONDIZIONE DI ESISTENZA DEGLI ARGOMENTI CONTENENTI LA x (NEL NOSTRO CASO $x-1>0$):

$$\begin{cases} x-1=3 \\ x-1>0 \end{cases}$$

RISOLVIAMO IL SISTEMA: $\begin{cases} x=3+1 \\ x>1 \end{cases} \rightarrow \begin{cases} x=4 \\ x>1 \end{cases}$



$\boxed{x=4}$

2) $\boxed{\log x + \log 5 = \log(2x+1) - 3\log 2}$

I LOGARITMI SONO TUTTI NELLA STESSA BASE (10); POSSIAMO APPLICARE LE PROPRIETÀ:

$$\log(x \cdot 5) = \log(2x+1) - \log 2^3$$

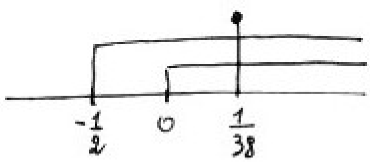
$$\log 5x = \log \frac{2x+1}{8}$$

PASSIAMO AGLI ARGOMENTI, METTENDO A SISTEMA I CAMPI DI ESISTENZA:

$$\begin{cases} 5x = \frac{2x+1}{8} \\ x>0 \\ 2x+1>0 \end{cases}$$

RISOLVIAMO IL SISTEMA: $\begin{cases} 40x = 2x+1 \\ x>0 \\ 2x>-1 \end{cases}$ $\begin{cases} 40x-2x=1 \\ x>0 \\ x>-\frac{1}{2} \end{cases}$

$$\begin{cases} 38x=1 \\ x>0 \\ x>-\frac{1}{2} \end{cases} \quad \begin{cases} x=\frac{1}{38} \\ x>0 \\ x>-\frac{1}{2} \end{cases}$$

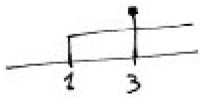


$\boxed{x=\frac{1}{38}}$

3) $\boxed{\log_{\frac{1}{3}} 2 = \log_{\frac{1}{3}} (x-1)}$

PASSIAMO SUBITO AGLI ARGOMENTI:

$\begin{cases} 2 = x-1 \\ x-1>0 \end{cases}$ $\begin{cases} 2+1 = x \\ x>1 \end{cases}$ $\begin{cases} 3 = x \\ x>1 \end{cases}$ $\begin{cases} x = 3 \\ x>1 \end{cases}$

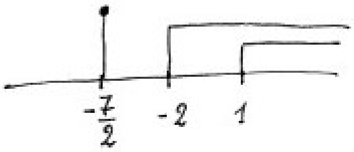


$\boxed{x=3}$

4) $\boxed{\ln(x-1) = \ln 3 + \ln(x+2)}$

$\ln(x-1) = \ln[3\cdot(x+2)]$

$\begin{cases} x-1 = 3\cdot(x+2) \\ x-1>0 \\ x+2>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x-1 = 3x+6 \\ x>1 \\ x>-2 \end{cases}$ $\begin{cases} x-3x = 6+1 \\ \to \\ \to \end{cases}$ $\begin{cases} -2x = 7 \\ \to \\ \to \end{cases}$ $\begin{cases} x = -\frac{7}{2} \\ x>1 \\ x>-2 \end{cases}$



POICHÉ NON VI SONO INTERSEZIONI COMUNI IL SISTEMA È IMPOSSIBILE, QUINDI ANCHE L'EQUAZIONE LOGARITMICA È IMPOSSIBILE $(S=\emptyset)$

5) $\boxed{\log_4^2 x^2 - 4\log_4 x + 1 = 0}$

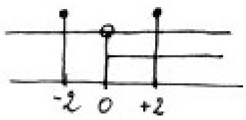
$\log_4^2 x^2 - 2\cdot 2\log_4 x + 1 = 0 \rightarrow \log_4^2 x^2 - 2\log_4 x^2 + 1 = 0$

SI PONE $\log_4 x^2 = t$, L'EQUAZIONE DIVENTA: $t^2 - 2t + 1 = 0$

SI RISOLVE L'EQUAZIONE: $t = \frac{2\pm\sqrt{4-4}}{2} = \frac{2\pm 0}{2} = t_1 = t_2 = 1$

SI RISOSTITUISCE METTENDO A SISTEMA LE CONDIZIONI DI ESISTENZA:

$\begin{cases} \log_4 x^2 = 1 \\ x^2>0 \\ x>0 \end{cases}$ $\begin{cases} \log_4 x^2 = \log_4 4 \\ x<0 \vee x>0 \\ x>0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 = 4 \\ \to \\ \to \end{cases}$ $\begin{cases} x = \pm 2 \\ \to \\ \to \end{cases}$



L'UNICA SOLUZIONE ACCETTABILE È $\boxed{x=2}$

8. Calcolare le seguenti **disequazioni logaritmiche**

1) $\boxed{\log_3 2 + \log_3 (x-1) > \log_3 x}$

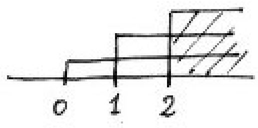
SI APPLICA LA PROPRIETÀ DEI LOGARITMI AL PRIMO MEMBRO:

$$\log_3 [2 \cdot (x-1)] > \log_3 x$$

$$\log_3 (2x-2) > \log_3 x$$

SI PASSA AGLI ARGOMENTI, MANTENENDO IL VERSO DELLA DISEQUAZIONE POICHÈ LA BASE È MAGGIORE DI 1; SI METTONO A SISTEMA LE CONDIZIONI DI ESISTENZA:

$$\begin{cases} 2x-2>x \\ x-1>0 \\ x>0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x-x>2 \\ x>1 \\ x>0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x>2 \\ x>1 \\ x>0 \end{cases}$$



$\boxed{x>2}$

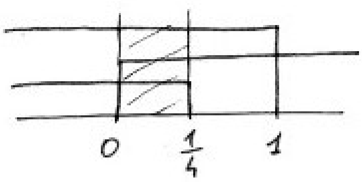
2) $\boxed{\log_{\frac{1}{4}} x > \log_{\frac{1}{4}} (1-x) - \log_{\frac{1}{4}} 3}$

$$\log_{\frac{1}{4}} x > \log_{\frac{1}{4}} \frac{1-x}{3}$$

SI PASSA AGLI ARGOMENTI, MA SI CAMBIA IL VERSO, POICHÈ LA BASE È COMPRESA TRA 0 ED 1:

$$\begin{cases} x < \frac{1-x}{3} \\ x>0 \\ 1-x>0 \end{cases} \qquad \begin{cases} \frac{3x}{\cancel{3}} < \frac{1-x}{\cancel{3}} \\ x>0 \\ -x>-1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x+x<1 \\ x>0 \\ x<1 \end{cases} \qquad \begin{cases} 4x<1 \\ x>0 \\ x<1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x<\frac{1}{4} \\ x>0 \\ x<1 \end{cases}$$



$\boxed{0<x<\frac{1}{4}}$

3) $$\boxed{\frac{2}{\log_{\frac{2}{5}} x - 1} < \frac{\log_{\frac{2}{5}} x}{\log_{\frac{2}{5}} x - 1}}$$

SI PONE $\log_{\frac{2}{5}} x = t$, LA DISEQUAZIONE DIVENTA:

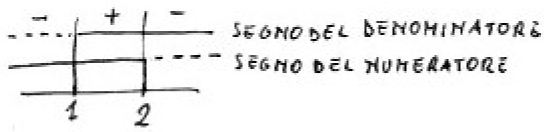
$$\frac{2}{t-1} < \frac{t}{t-1}$$ È UNA DISEQUAZIONE ALGEBRICA FRATTA:

$$\frac{2}{t-1} - \frac{t}{t-1} < 0$$

$$\frac{2-t}{t-1} < 0$$

STUDIO IL SEGNO DEL NUMERATORE: $N>0 \rightarrow 2-t>0 \rightarrow -t>-2 \rightarrow t<2$

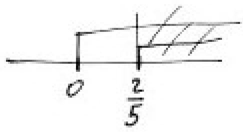
" " DENOMINATORE: $D>0 \rightarrow t-1>0 \rightarrow t>1$



$t<1 \vee t>2$. SI RISOSTITUISCONO LE t:

$t<1 \rightarrow \log_{\frac{2}{5}} x < 1 \rightarrow \log_{\frac{2}{5}} x < \log_{\frac{2}{5}} \frac{2}{5}$, DA CUI PASSANDO AGLI ARGOMENTI E METTENDO A SISTEMA:

$$\begin{cases} x > \frac{2}{5} \\ x > 0 \end{cases}$$

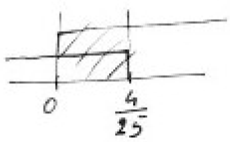


$x > \frac{2}{5}$

$$t>2 \rightarrow \log_{\frac{2}{5}} x > 2 \rightarrow \log_{\frac{2}{5}} x > 2 \cdot 1 \rightarrow \log_{\frac{2}{5}} x > 2 \cdot \log_{\frac{2}{5}} \frac{2}{5}$$

$$\log_{\frac{2}{5}} x > \log_{\frac{2}{5}} \left(\frac{2}{5}\right)^2 \rightarrow \log_{\frac{2}{5}} x > \log_{\frac{2}{5}} \frac{4}{25}$$

$$\begin{cases} x < \frac{4}{25} \\ x > 0 \end{cases}$$



$0 < x < \frac{4}{25}$

SOLUZIONE FINALE: $\boxed{0 < x < \frac{4}{25} \vee x > \frac{2}{5}}$

9. Altre equazioni

1) $\boxed{3^{x-1} = 2}$

POICHÈ LE BASI SONO DIVERSE, APPLICHIAMO AL SECONDO MEMBRO LA PROPRIETÀ: $a = b^{\log_b a}$:

$$3^{x-1} = 3^{\log_3 2}$$

ADESSO POSSIAMO PASSARE AGLI ESPONENTI:

$$x - 1 = \log_3 2$$

$$\boxed{x = 1 + \log_3 2}$$

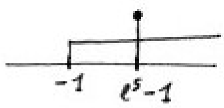
2) $\boxed{\ln(x+1) = 5}$

ANCHE IN QUESTO CASO DOBBIAMO LAVORARE AL SECONDO MEMBRO, APPLICANDO LA FORMULA: $a = \log_b b^a$:

$$\ln(x+1) = \ln e^5$$

DA CUI:

$$\begin{cases} x+1 = e^5 \\ x+1 > 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x = e^5 - 1 \simeq 147{,}4 \\ x > -1 \end{cases}$$



$$\boxed{x = e^5 - 1}$$