EQUAZIONI DI 2° GRADO – ESERCIZI CON SOLUZIONI

Risolvere le seguenti equazioni di 2° grado:

1. Monomie. Tutte le equazioni hanno entrambe le soluzioni uguali a zero, indipendentemente dal coefficiente del termine di secondo grado.
    a. $5x^2 = 0$ $\qquad x_1 = 0 \wedge x_2 = 0$
    b. $-7x^2 = 0$ $\qquad x_1 = 0 \wedge x_2 = 0$
    c. $\frac{1}{2}x^2 = 0$ $\qquad x_1 = 0 \wedge x_2 = 0$
2. Pure
    a. $3x^2 - 12 = 0$

$x_1 = -\sqrt{-\frac{-12}{3}} \wedge x_2 = \sqrt{-\frac{-12}{3}}$ da cui $x_1 = -\sqrt{4} \wedge x_2 = \sqrt{4}$ e quindi $x_1 = -2 \wedge x_2 = 2$

    b. $-x^2 - 2 = 0$

$x_1 = -\sqrt{-\frac{-2}{-1}} \wedge x_2 = \sqrt{-\frac{-2}{-1}}$ da cui $x_1 = -\sqrt{-2} \wedge x_2 = \sqrt{-2}$ equazione impossibile (infatti i coefficienti dell'equazione sono concordi)

    c. $27x^2 - 3 = 0$

$x_1 = -\sqrt{-\frac{-3}{27}} \wedge x_2 = \sqrt{-\frac{-3}{27}}$ da cui $x_1 = -\sqrt{\frac{1}{9}} \wedge x_2 = \sqrt{\frac{1}{9}}$ e quindi $x_1 = -\frac{1}{3} \wedge x_2 = \frac{1}{3}$

3. Spurie
    a. $4x^2 - 13x = 0$

$x_1 = 0 \wedge x_2 = \frac{13}{4}$

    b. $x^2 + x = 0$

$x_1 = 0 \wedge x_2 = -1$

    c. $-6x^2 + 2x = 0$

$$x_1 = 0 \wedge x_2 = -\frac{2}{-6} \quad \text{da cui } x_1 = 0 \wedge x_2 = \frac{1}{3}$$

4. Complete. Possiamo applicare direttamente la formula risolutiva perché le equazioni sono in forma normale: $x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

   a. $x^2 - x - 20 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-(-1) \pm \sqrt{(-1)^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-20)}}{2 \cdot 1} = \frac{1 \pm \sqrt{1 + 80}}{2} = \frac{1 \pm \sqrt{81}}{2} = \frac{1 \pm 9}{2} = \left\langle \begin{array}{l} x_1 = \frac{1+9}{2} = 5 \\ x_2 = \frac{1-9}{2} = -4 \end{array} \right.$$

   b. $4x^2 + 4x + 1 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4 \cdot 4 \cdot 1}}{2 \cdot 4} = \frac{-4 \pm \sqrt{16 - 16}}{8} = \frac{-4 \pm \sqrt{0}}{8} = \frac{-4 \pm 0}{8} = \left\langle \begin{array}{l} x_1 = \frac{-4+0}{8} = -\frac{1}{2} \\ x_2 = \frac{-4-0}{8} = -\frac{1}{2} \end{array} \right.$$

   c. $-3x^2 + x - 2 = 0$

$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot (-3) \cdot (-2)}}{2 \cdot (-3)} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 24}}{-6} = \frac{-1 \pm \sqrt{-23}}{-6}$ equazione impossibile (non si può calcolare la radice quadrata di -23).

   d. $x^2 + 2x - 5 = 0$

$$x_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-5)}}{2 \cdot 1} = \frac{-2 \pm \sqrt{4 + 20}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{24}}{2} = \left\langle \begin{array}{l} x_1 = \frac{-2 + \sqrt{24}}{2} \\ x_2 = \frac{-2 - \sqrt{24}}{2} \end{array} \right.$$

5. A partire dalla forma non normale. Prima di applicare la formula risolutiva è necessario portare le equazioni alla forma normale.

   a. $-x + 2x^2 = \frac{5 - 3x}{2}$

Si calcola il m.c.m. di entrambi i membri: $\frac{-2x + 4x^2}{2} = \frac{5 - 3x}{2}$

Si moltiplica entrambi i membri per 2 e si semplifica: $-2x + 4x^2 = 5 - 3x$

Si portano tutti i termini al primo membro: $-2x+4x^2-5+3x=0$

Si ordinano i termini secondo le potenze decrescenti della x e si sommano i termini simili:

$4x^2+x-5=0$

Adesso l'equazione è in forma normale e si può applicare la formula risolutiva:

$$x_{1,2}=\frac{-1\pm\sqrt{1^2-4\cdot4\cdot(-5)}}{2\cdot4}=\frac{-1\pm\sqrt{1+80}}{8}=\frac{-1\pm\sqrt{81}}{8}=\frac{-1\pm9}{8}=\left\langle\begin{array}{l}x_1=\frac{-1+9}{8}=1\\ x_2=\frac{-1-9}{8}=-\frac{5}{4}\end{array}\right.$$

b. $(x-1)^2+\frac{8}{3}-4x=(2x-3)(2x+3)-4x^2+\frac{5}{6}x$

Si svolgono i prodotti notevoli al primo e al secondo membro:

$x^2-2x+1+\frac{8}{3}-4x=4x^2-9-4x^2+\frac{5}{6}x$

Si semplificano i termini opposti e si sommano quelli simili: $x^2-6x+\frac{11}{3}=-9+\frac{5}{6}x$

Si calcola il m.c.m. comune ai due membri: $\frac{6x^2-36x+22}{6}=\frac{-54+5x}{6}$

Si moltiplica entrambi i membri per 6 e si semplifica: $6x^2-36x+22=-54+5x$

Si portano tutti i termini al primo membro: $6x^2-36x+22+54-5x=0$

Si sommano i termini simili: $6x^2-41x+76=0$

Adesso l'equazione è in forma normale e si può applicare la formula risolutiva:

$$x_{1,2}=\frac{41\pm\sqrt{(-41)^2-4\cdot6\cdot76}}{2\cdot6}=\frac{41\pm\sqrt{1681-1824}}{12}=\frac{41\pm\sqrt{-143}}{12}$$ equazione impossibile.

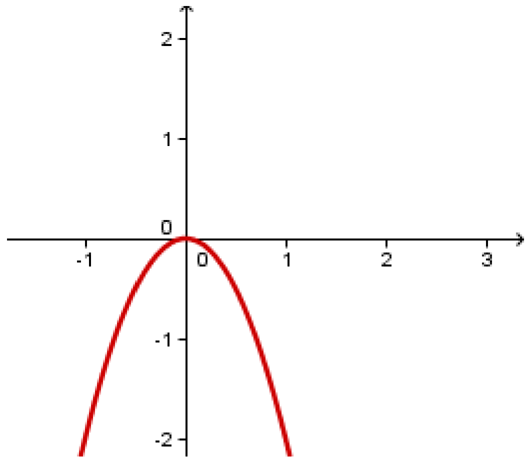
Stabilire, senza risolverle, se le seguenti equazioni hanno soluzioni reali in base al Δ. Basta calcolare il discriminante sapendo che $\Delta=b^2-4ac$

6. $3x^2-x+2=0$ $\quad\Delta=(-1)^2-4\cdot3\cdot2=1-24=-23<0$ zero soluzioni reali
7. $9x^2-6x+1=0$ $\quad\Delta=0$ due soluzioni reali coincidenti
8. $x^2+x-40=0$ $\quad\Delta=161>0$ due soluzioni reali distinte
9. $2x^2-9=0$ $\quad\Delta=72>0$ due soluzioni reali distinte
10. $x^2-3x=0$ $\quad\Delta=9>0$ due soluzioni reali distinte

Risolvere le seguenti equazioni e fare un disegno qualitativo, tenendo conto però delle soluzioni e della concavità, della parabola corrispondente:

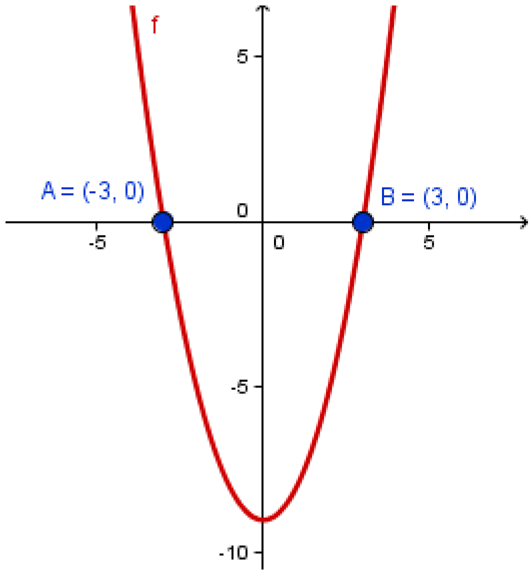
11. $-2x^2 = 0$

L'equazione è in forma monomia, quindi le due soluzioni sono $x_1 = 0 \wedge x_2 = 0$. La parabola volge la concavità verso il basso, poiché $a = -2 < 0$ ed il Vertice coincide con l'origine degli assi.



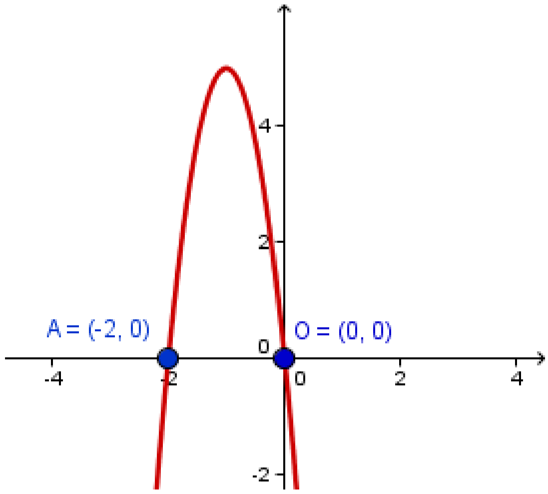
12. $x^2 - 9 = 0$

L'equazione è in forma pura: le due soluzioni sono $x_1 = -3 \wedge x_2 = 3$, quindi la parabola interseca l'asse delle ascisse nei punti $A(-3{,}0)$ e $B(3{,}0)$ e l'Asse coincide con l'asse delle ordinate. La parabola volge la concavità verso l'alto ($a = 1 > 0$).



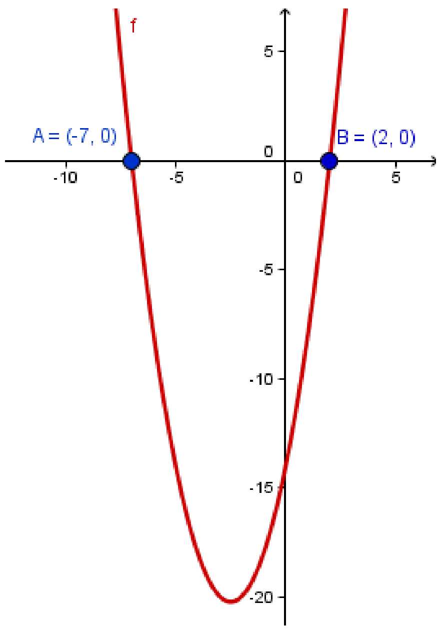
13. $-5x^2 - 10x = 0$

L'equazione è in forma spuria: le due soluzioni sono $x_1 = 0 \wedge x_2 = -2$. La parabola passa per l'origine degli assi, infatti interseca l'asse delle ascisse nei punti $O(0{,}0)$ e $A(-2{,}0)$. La concavità è rivolta verso il basso ($a = -5 < 0$).



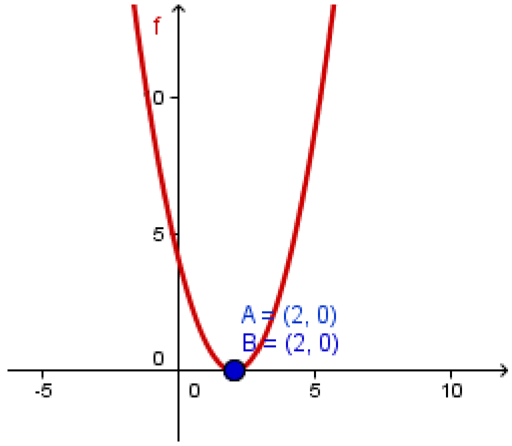
14. $x^2 + 5x - 14 = 0$

L'equazione è in forma completa. Applicando la forma risolutiva $x_{1,2} = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$ si ottengono le due soluzioni reali distinte $x_1 = -7 \wedge x_2 = 2$. Quindi la parabola interseca l'asse delle ascisse nei punti $A(-7{,}0)$ e $B(2{,}0)$. La concavità è rivolta verso l'alto ($a = 1 > 0$).



15. $x^2 - 4x + 4 = 0$

L'equazione è in forma completa. Risolvendola si ottengono le due soluzioni reali coincidenti $x_1 = 2 \wedge x_2 = 2$, quindi la parabola è tangente all'asse delle ascisse nei due punti coincidenti $A(2,0)$ e $B(2,0)$. La concavità è rivolta verso l'alto ($a = 1 > 0$).



16. $-3x^2 + x - 4 = 0$

L'equazione è in forma completa. Risolvendola si vede che il delta è negativo, quindi l'equazione è impossibile. Questo vuol dire che la parabola non ha intersezioni con l'asse delle ascisse. La concavità è rivolta verso il basso ($a = -3 < 0$).