EQUAZIONI DI SECONDO GRADO

Le equazioni di secondo grado in una incognita sono uguaglianze di due polinomi di cui almeno uno è di secondo grado e l'altro è di grado minore o uguale a due.

Definizione: una **equazione di secondo grado** si dice in **forma normale** se è scritta nella forma: $ax^2 + bx + c = 0$ con $a \neq 0$.

Nella forma normale, dunque, il polinomio al primo membro deve essere **ridotto**, cioè i termini simili devono essere sommati, ed **ordinato** secondo le potenze decrescenti della incognita. Al secondo membro deve esserci 0. Il coefficiente del termine di secondo grado, cioè la a, deve essere diverso da zero $(a \neq 0)$ altrimenti l'equazione si riduce ad una equazione di primo grado, argomento già trattato.

Una equazione di secondo grado può essere classificata sulla base dei coefficienti b e c in questo modo (tralasciamo la trattazione della a che sappiamo dover essere diversa da zero):

1. Forme incomplete:
   a. Forma **monomia**: $ax^2 = 0$ $\quad b = 0 \wedge c = 0$
   b. Forma **pura**: $ax^2 + c = 0$ $\quad b = 0 \wedge c \neq 0$
   c. Forma **spuria**: $ax^2 + bx = 0$ $\quad b \neq 0 \wedge c = 0$
2. Forma **completa**: $ax^2 + bx + c = 0$ $\quad b \neq 0 \wedge c \neq 0$

Risoluzione delle equazioni di secondo grado

Le equazioni di secondo grado hanno al massimo due soluzioni reali. Vediamo come si risolvono in base alla classificazione vista sopra.

Equazione in forma **monomia**: $ax^2 = 0$

In questo caso sappiamo subito quante e quali soluzioni ha l'equazione, poiché, per la legge di annullamento del prodotto, $x^2 = 0$ e quindi le due soluzioni sono entrambe uguali a zero: $x_1 = 0 \wedge x_2 = 0$

Esempio: data l'equazione $3x^2 = 0$ le soluzioni sono $x_1 = 0 \wedge x_2 = 0$

Equazione in forma **pura**: $ax^2 + c = 0$

Per risolverla isoliamo la x con alcuni passaggi:

si porta la c al secondo membro $ax^2 = -c$

si divide tutto per a $x^2 = -\frac{c}{a}$

si estrae la radice quadrata di entrambi i membri $x_1 = -\sqrt{-\frac{c}{a}} \wedge x_2 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$

Esempio: data l'equazione $5x^2 - 15 = 0$ le soluzioni sono $x_1 = -\sqrt{-\frac{-15}{5}} \wedge x_2 = \sqrt{-\frac{-15}{5}}$ da cui $x_1 = -\sqrt{3} \wedge x_2 = \sqrt{3}$

Osservazione: Poiché nella formula risolutiva compare una radice quadrata, è necessario che il radicando sia positivo o uguale a zero affinché il risultato sia un numero reale. Questo si ottiene se a e c sono <u>discordi</u> (cioè hanno segno diverso). Nel caso in cui a e c siano concordi otterremo infatti una radice quadrata di un numero negativo. Per esempio proviamo a risolvere l'equazione pura: $7x^2 + 14 = 0$, abbiamo:

$x_1 = -\sqrt{-\frac{14}{7}} \wedge x_2 = \sqrt{-\frac{14}{7}}$ da cui $x_1 = -\sqrt{-2} \wedge x_2 = \sqrt{-2}$

In entrambe le soluzioni non è possibile calcolare nell'insieme dei numeri reali la radice quadrata di meno due, quindi l'equazione <u>non ha</u> soluzioni reali (equazione impossibile).

Equazione in forma **spuria**: $ax^2 + bx = 0$

In questo caso per risolvere l'equazione si adotta una tecnica differente, si fattorizza il primo membro, mettendo in evidenza una x:

$x \cdot (ax + b) = 0$

Per la legge di annullamento del prodotto poniamo uguale a zero entrambi i fattori:

$x = 0 \wedge ax + b = 0$

da cui le due soluzioni:

$x_1 = 0 \wedge x_2 = -\frac{b}{a}$

Esempio: data l'equazione $4x^2 + 7x = 0$ le soluzioni sono $x_1 = 0 \wedge x_2 = -\frac{7}{4}$

Osservazione: nell'equazione spuria le due soluzioni sono sempre reali ed una è sempre uguale a zero.

Equazione in forma **completa**: $ax^2 + bx + c = 0$

E' il caso generale. Per questa equazione non faremo la dimostrazione, ma forniremo direttamente la formula risolutiva:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \wedge x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

In modo improprio le due soluzioni vengono sintetizzate nella formula più compatta:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

Esempio: data l'equazione $x^2 + 2x - 3 = 0$ le soluzioni sono:

$$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1} \wedge x_2 = \frac{-2 + \sqrt{2^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-3)}}{2 \cdot 1}$$

Svolgendo i calcoli si ha:

$x_1 = \frac{-2 - \sqrt{16}}{2} \wedge x_2 = \frac{-2 + \sqrt{16}}{2}$ da cui $x_1 = \frac{-2 - 4}{2} \wedge x_2 = \frac{-2 + 4}{2}$, infine: $x_1 = -3 \wedge x_2 = 1$

Osservazione: La forma completa può avere soluzioni reali o non averle: questo argomento verrà trattato più avanti. Inoltre questa formula può essere applicata anche alle altre forme, ma non è conveniente, in quanto più laboriosa.

Di seguito riportiamo uno schema riepilogativo delle varie forme con relative formule risolutive:

Forme incomplete:		Formule risolutive
Forma **monomia**:	$ax^2 = 0$	$x_1 = 0 \wedge x_2 = 0$
Forma **pura**:	$ax^2 + c = 0$	$x_1 = -\sqrt{-\frac{c}{a}} \wedge x_2 = \sqrt{-\frac{c}{a}}$
Forma **spuria**:	$ax^2 + bx = 0$	$x_1 = 0 \wedge x_2 = -\frac{b}{a}$
Forma **completa**:	$ax^2 + bx + c = 0$	$x_1 = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} \wedge x_2 = \frac{-b + \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

Infine diciamo che se una equazione non è in forma normale, prima di applicare la formula risolutiva è necessario portarla alla forma normale con le usuali regole algebriche.

La verifica delle soluzioni

Una volta trovate le soluzioni di una equazione possiamo controllare se tali soluzioni sono corrette. Lo strumento per eseguire ciò si chiama **verifica delle soluzioni**.

La verifica delle soluzioni è un metodo valido per ogni equazione, ma noi lo vedremo soltanto per quelle di secondo grado.

Riprendiamo l'equazione risolta sopra: $x^2 + 2x - 3 = 0$. Avevamo trovato le soluzioni:

$x_1 = -3 \wedge x_2 = 1$. <u>Per verificare se sono corrette basta sostituire ciascun valore al posto della x nell'equazione e controllare che ciò che si ottiene è una identità</u> (cioè una tautologia).

Verifica della soluzione $x_1 = -3$:

$(-3)^2 + 2 \cdot (-3) - 3 = 0$ da cui, svolgendo i calcoli: $9 - 6 - 3 = 0$ da cui $0 = 0$.

Abbiamo ottenuto una identità e quindi la soluzione $x_1 = -3$ è corretta.

Verifica della soluzione $x_2 = 1$:

Il procedimento è uguale al precedente e viene lasciato come esercizio.

Il discriminante

Nella formula risolutiva generale osserviamo il radicando: $b^2 - 4ac$. Tale termine viene chiamato **discriminante** e viene indicato con la lettera <u>delta</u> maiuscola dell'alfabeto greco: Δ. Quindi $\Delta = b^2 - 4ac$.

Conoscendo a priori il discriminante possiamo dire quante soluzioni avrà l'equazione. Distinguiamo tre casi:

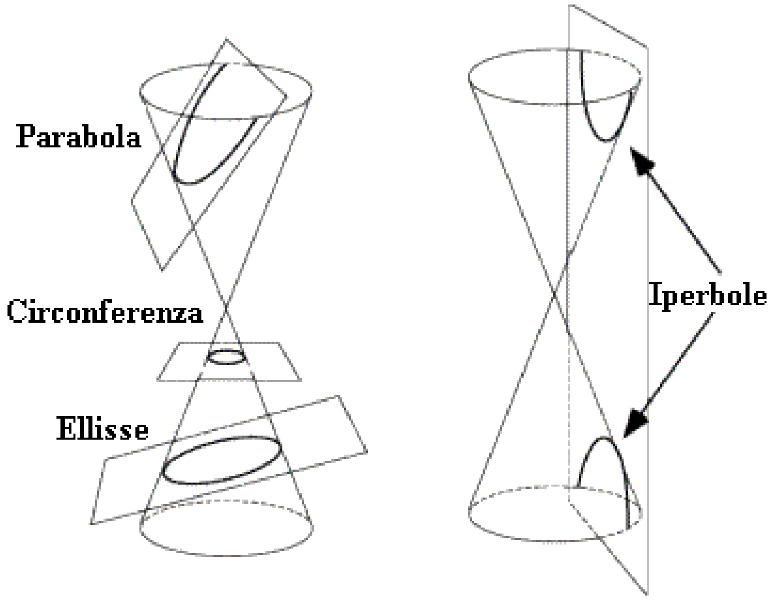
- $\Delta > 0$ due soluzioni reali distinte
- $\Delta = 0$ due soluzioni reali coincidenti
- $\Delta < 0$ nessuna soluzione reale

Il perché di questa distinzione è ovvio se si considera che il discriminante è il radicando della formula risolutiva.

Le equazioni di secondo grado e la parabola

Risolvere una equazione di secondo grado ha un corrispettivo geometrico che vedremo in questo paragrafo. Prima però dobbiamo parlare, seppur in modo non approfondito, della parabola.

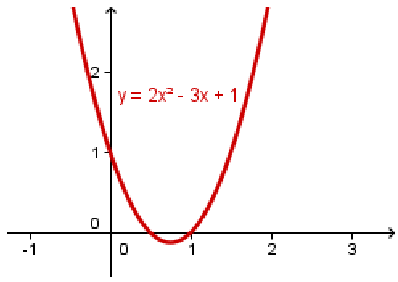
La **parabola** è una conica. Il termine “conica” deriva dal fatto che si può ottenere tagliando un cono con un piano secondo una certa inclinazione. Variando tale inclinazione si ottengono le altre coniche: ellisse e iperbole (la circonferenza è un particolare tipo di ellisse).



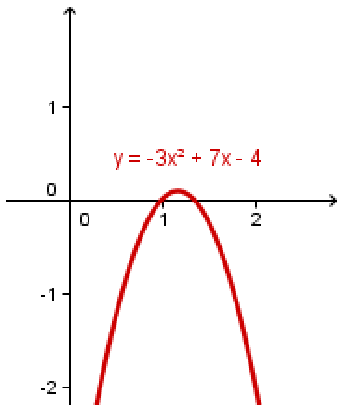
Da un punto di vista algebrico la parabola ha un’equazione del tipo $y = ax^2 + bx + c$. Si noti la forte somiglianza con le equazioni di secondo grado.

Il coefficiente a ci fornisce indicazione sulla concavità della parabola; si possono avere due casi:

- $a > 0$ la concavità è rivolta verso l’<u>alto</u>. Esempio:



- $a < 0$ la concavità è rivolta verso il <u>basso</u>. Esempio:

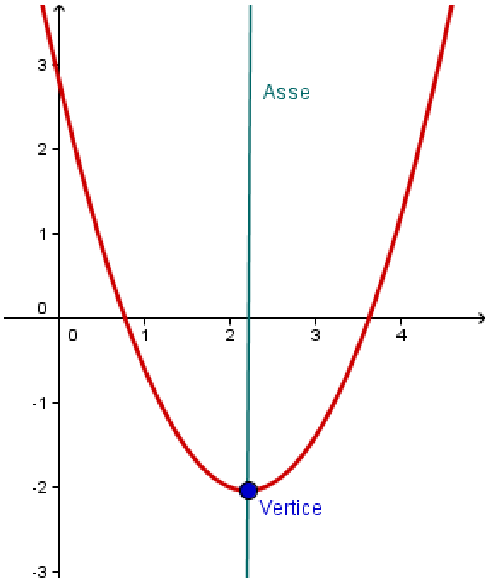


Due elementi caratteristici della parabola sono il Vertice e l'Asse di simmetria (o semplicemente Asse). Diamo di seguito la spiegazione di cosa sono, senza darne una definizione rigorosa.

Il **Vertice** è il punto "più basso" della parabola (se la concavità è rivolta verso l'alto, altrimenti è il punto "più alto").

L'**Asse** è la retta che divide la parabola in due parti speculari.

L'equazione $y = ax^2 + bx + c$, come visto sopra, descrive le parabole con asse parallelo all'asse delle ordinate.



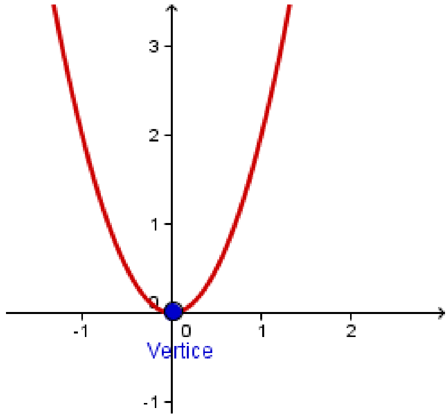
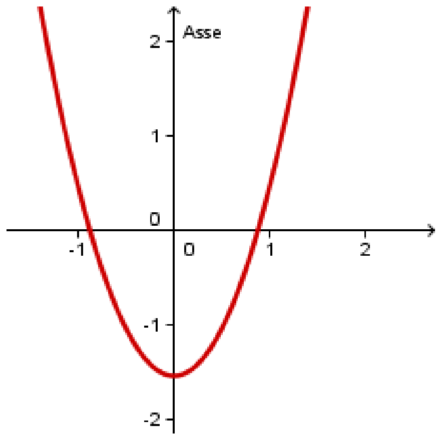
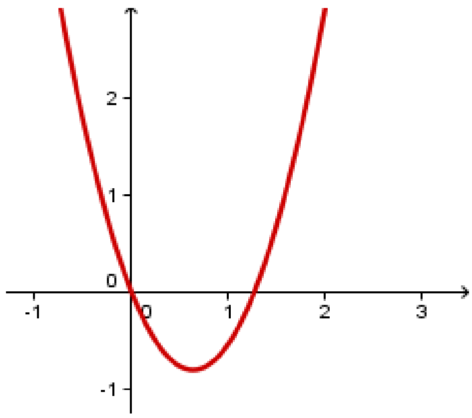
Poniamoci adesso il problema di intersecare una parabola con l'asse delle ascisse: per fare ciò dovremo mettere a sistema l'equazione della parabola con l'equazione dell'asse delle ascisse:

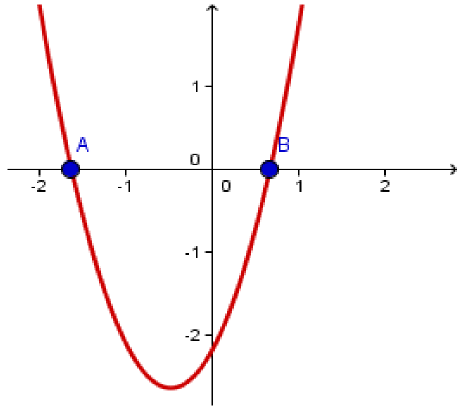
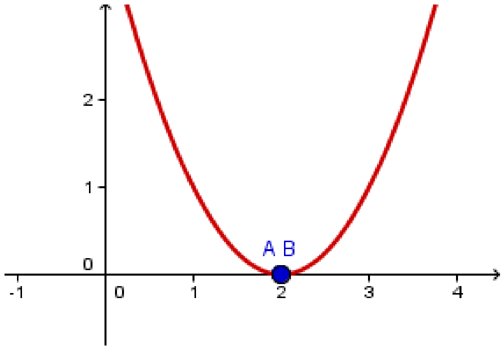
$\begin{cases} y = ax^2 + bx + c \\ y = 0 \end{cases}$ ed operando la sostituzione abbiamo: $\begin{cases} 0 = ax^2 + bx + c \\ y = 0 \end{cases}$

La prima equazione del sistema, una volta scambiato il primo membro con il secondo: $ax^2 + bx + c = 0$ è proprio l'equazione di secondo grado in forma normale.

Ricapitolando possiamo dire che, <u>da un punto di vista geometrico, risolvere una equazione di secondo grado significa trovare gli eventuali punti di intersezione della parabola con l'asse delle ascisse</u>.

Le varie equazioni di secondo grado viste sopra hanno un corrispettivo geometrico nella diversa posizione delle parabole nel piano cartesiano. Forniamo di seguito un parallelismo tra la situazione algebrica e quella geometrica, facendo degli esempi con parabole aventi la concavità verso l’alto (ma le situazioni sono analoghe per parabole con concavità rivolta verso il basso).

Forma monomia $ax^2 = 0$	Il vertice coincide con l’origine degli assi 
Forma pura $ax^2 + c = 0$	L’asse coincide con l’asse delle ordinate 
Forma spuria $ax^2 + bx = 0$	Una intersezione è l’origine degli assi 

Forma completa $ax^2 + bx + c = 0$ con $\Delta > 0$	Le intersezioni sono due punti distinti (parabola **secante** l'asse delle ascisse) 
Forma completa $ax^2 + bx + c = 0$ con $\Delta = 0$	Le intersezioni sono due punti coincidenti (parabola **tangente** all'asse delle ascisse) 
Forma completa $ax^2 + bx + c = 0$ con $\Delta < 0$	Non esistono punti di intersezione (parabola **esterna** all'asse delle ascisse)