EQUAZIONI FRATTE

Cosa sono

Le equazioni fratte si differenziano dalle equazioni intere perché l'incognita compare, almeno una volta, al denominatore.

Facciamo degli esempi:

equazioni intere:

1. $3x^5 - 4 = 2x$
2. $8 - \sqrt{2}\, x^3 - x = 3x^2$
3. $\frac{3}{2}x - x^2 = 5$

equazioni fratte:

1. $\frac{3x^5 - 4}{x - 5} = 2x$
2. $4x^2 - 3x + \frac{1}{x} = 0$
3. $\frac{4x^2 - 3x}{x - 1} + \frac{1}{x} = \frac{2x}{x^2 + 3}$

Osservazione: nell'esempio 3 delle equazioni intere abbiamo all'inizio $\frac{3}{2}$. Questa è una frazione, ma è numerica. Affinché l'equazione sia fratta è necessario che al denominatore ci sia l'incognita (nei nostri esempi la x) e non dei semplici numeri.

Come si risolvono

La risoluzione delle equazioni fratte si differenzia da quella delle equazioni intere perché dobbiamo effettuare dei passi aggiuntivi. In una equazione intera, non essendoci le incognite al denominatore, sicuramente non avremo divisioni per zero (operazione vietata in matematica). Nelle equazioni fratte, invece, le incognite al denominatore, per loro caratteristica di variabilità, potrebbero far sì che, assumendo determinati valori, facciano diventare zero i denominatori. Facciamo degli esempi.

Nell'equazione $3x^5 - 4 = 2x$, che abbiamo detto essere intera, per ogni valore che attribuiamo ad x non otterremo mai una divisione per zero.

Stesso discorso per l'equazione intera $\frac{3}{2}x - x^2 = 5$. Qui una divisione c'è, 3:2, ma il denominatore è 2 e non 0.

Invece nell'equazione $\frac{3x^5 - 4}{x - 5} = 2x$ esiste un numero che, messo al posto della x rende zero il denominatore $x - 5$. Tale numero è 5, infatti $5 - 5 = 0$.

Anche nell'equazione $4x^2 - 3x + \frac{1}{x} = 0$ c'è una divisione per zero se metto al posto della x proprio 0.

Per esercizio trovare i valori che annullano i denominatori dell'equazione fratta $\frac{4x^2 - 3x}{x - 1} + \frac{1}{x} = \frac{2x}{x^2 + 3}$.

Questo procedimento di esclusione dei numeri che, messi al posto dell'incognita, rendono zero i denominatori, prende il nome di **Ricerca del Dominio dell'equazione** (o **Campo di Esistenza** o **Condizioni di Esistenza**).

Ma perché è importante ricercare il Dominio dell'equazione? Perché, risolvendo l'equazione, potremmo trovare come soluzioni proprio quei numeri che avevamo escluso dal Dominio, quindi ci troveremmo di fronte a soluzioni che annullerebbero qualche denominatore e quindi non accettabili.

Per questo motivo il nostro primo passo sarà la ricerca del Dominio dell'equazione.

Come secondo passo eseguiremo la risoluzione, applicando le proprietà algebriche per ridurre la complessità dell'equazione iniziale.

Come terzo ed ultimo passo dovremo confrontare le soluzioni trovate con il Dominio e dichiarare se le soluzioni trovate sono accettabili o non accettabili.

Riepiloghiamo i passaggi per risolvere le equazioni fratte:

1. **Ricerca del Dominio**
2. **Risoluzione**
3. **Controllo dell'appartenenza delle soluzioni al Dominio.**

Adesso non rimane altro che fare qualche esempio.

RISOLVERE LA SEGUENTE EQUAZIONE FRATTA:

$$\frac{x-2}{x+3} = \frac{1}{2}$$

1) RICERCA DEL DOMINIO:

PER $x=-3$ ABBIAMO $x+3=0$, INFATTI $-3+3=0$

DOMINIO $= \mathbb{R} - \{-3\}$ OVVERO IL DOMINIO È L'INSIEME DI TUTTI I NUMERI REALI TRANNE IL -3.

2) RISOLUZIONE:

$$\frac{x-2}{x+3} = \frac{1}{2}$$ SI FA IL m.c.m. DEI DENOMINATORI

$$\frac{2(x-2)}{\cancel{2(x+3)}} = \frac{1\cdot(x+3)}{\cancel{2(x+3)}}$$ SI SEMPLIFICANO I DUE DENOMINATORI

$$2x-4 = x+3$$ SI ESPLICITA LA x

$$2x - x = 4+3$$

$$x = 7$$

3) CONTROLLO DELL'APPARTENENZA DELLA SOLUZIONE AL DOMINIO

POICHÉ $7 \in$ DOMINIO, OVVERO 7 NON ANNULLA NESSUN DENOMINATORE

POSSIAMO CONCLUDERE CHE $\boxed{7}$ È UNA SOLUZIONE ACCETTABILE

RISOLVERE LA SEGUENTE EQUAZIONE FRATTA:

$$\frac{1}{x^2-2x} - \frac{2}{x^2-4} = \frac{1}{x^2+2x}$$

PRIMA DI TUTTO FATTORIZZIAMO I DENOMINATORI:

$$\frac{1}{x(x-2)} - \frac{2}{(x+2)(x-2)} = \frac{1}{x(x+2)}$$

1) RICERCA DEL DOMINIO:

QUI ABBIAMO TRE NUMERI CHE ANNULLANO I DENOMINATORI:

$0, +2, -2$, QUINDI IL DOMINIO È:

$$D = \mathbb{R} - \{0, -2, +2\}$$

2) RISOLUZIONE:

$$\frac{x+2-2x}{x\cancel{(x+2)(x+2)}} = \frac{x-2}{x\cancel{(x+2)(x-2)}}$$

$$-x+2 = x-2$$

$$-x-x = -2-2$$

$$-2x = -4$$

$$\frac{-2x}{-2} = -\frac{4}{-2}$$

$$x = +2$$

3) CONTROLLO DELL'APPARTENENZA DELLA SOLUZIONE AL DOMINIO:

POICHÉ $+2 \notin D$, POSSIAMO CONCLUDERE CHE $+2$ NON È ACCETTABILE

QUINDI L'EQUAZIONE NON HA SOLUZIONI, OVVERO È IMPOSSIBILE