DISEQUAZIONI

Prima di vedere cosa sono le disequazioni è necessario dare uno sguardo alle **disuguaglianze numeriche**. Al contrario delle uguaglianze numeriche, dove tra i numeri è presente il segno di uguaglianza (ad esempio 5 = 5), nelle disuguaglianze numeriche, tra i numeri, è presente uno dei segni <, >, $\leq$, $\geq$ (ad esempio 3 < 5).

I quattro simboli elencati sopra si leggono:

<	minore	
>	maggiore	
$\leq$	minore o uguale	(è una forma compatta per < o =)
$\geq$	maggiore o uguale	(è una forma compatta per > o =)

Una disuguaglianza può essere Vera o Falsa. Per esempio:

- $8 \leq 10$
- $2 \geq 2$
- $-3 < 1$
- $6 > 0$

sono Vere.

- $5 \geq 6$
- $-2 \geq 0$
- $\frac{1}{3} < \frac{1}{5}$
- $-4 > -3$

sono False.

Al contrario delle uguaglianze, nelle disuguaglianze, se si effettuano alcune operazioni particolari ai due membri, il segno può cambiare. Facciamo degli esempi per chiarire il concetto.

Partiamo da una disuguaglianza vera: $2 < 5$ e facciamo un elenco di casi:

- $2 < 5 \rightarrow 2 + 10 < 5 + 10 \rightarrow 12 < 15$
- $2 < 5 \rightarrow 2 - 1 < 5 - 1 \rightarrow 1 < 4$
- $2 < 5 \rightarrow 2 \cdot 3 < 5 \cdot 3 \rightarrow 6 < 15$
- $2 < 5 \rightarrow 2 : 2 < 5 : 2 \rightarrow 1 < 2{,}5$

Le disuguaglianze che abbiamo ottenuto sono tutte vere ed il segno di minore si è <u>mantenuto</u>. Questa cosa funziona anche se fossimo partiti da disuguaglianze diverse o da numeri negativi. Invece vediamo cosa succede se moltiplichiamo o dividiamo per numeri negativi:

- $2 < 5 \rightarrow 2 \cdot (-3) < 5 \cdot (-3) \rightarrow -6 > -15$
- $2 < 5 \rightarrow 2 : (-2) < 5 : (-2) \rightarrow -1 > -2{,}5$

In entrambi questi esempi siamo partiti da un segno < e siamo arrivati ad un segno >.

Se fossimo partiti dal segno > saremmo arrivati al segno <, da $\leq$ a $\geq$, da $\geq$ a $\leq$ (questi segni vengono chiamati verso della disequazione).

Ricapitolando:

Se si moltiplica o divide entrambi i membri di una disuguaglianza per un numero negativo, si ottiene una disuguaglianza con verso opposto a quello di partenza.

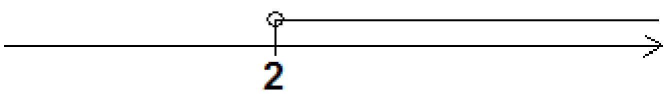
Per addizioni e sottrazioni con numeri positivi o negativi e moltiplicazioni e divisioni con numeri positivi il verso non cambia.

Nelle **disequazioni**, al contrario delle disuguaglianze in cui sono presenti solo numeri, si stabiliscono relazioni tra **polinomi** (o più in generale tra **frazioni algebriche**).

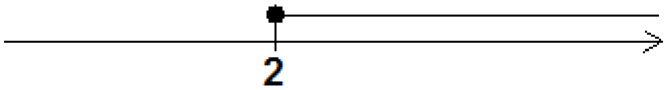
Esempi di disequazioni in una variabile:

- $1 - x \leq 3x^2$
- $x > 7 + 2x$
- $8 + x < \dfrac{x-1}{x^3}$

Risolvere una disequazione significa trovare i valori della variabile, per i quali si ottengono disuguaglianze vere. Per esempio, risolviamo la disequazione $x + 1 > 3$. Se x è un numero maggiore di 2 (per esempio 2,1 , 3 , 5 , 100) otteniamo disuguaglianze vere; se x è un numero minore o uguale a 2 (per esempio 1,9 , 1 , -6 , -50) si ottengono disuguaglianze false. Si noti come anche per x=2 la disuguaglianza sia falsa, infatti 2+1>3, da cui 3>3 è falsa. Graficamente si rappresenta la situazione con la linea dei numeri (asse delle ascisse) in questo modo:



Sopra (o sotto) la linea dei numeri, a partire in questo caso da 2, si traccia un'altra linea che va verso destra per indicare che la disequazione è vera per tutti i numeri maggiori di 2. In corrispondenza del 2 si è tracciato un "pallino vuoto" per indicare che il 2 è escluso. Nel caso in cui il 2 sia compreso si traccia un "pallino pieno". Esempio $x + 1 \geq 3$



Disequazioni di primo grado intere

Le disequazioni intere di primo grado si risolvono come le equazioni, ma si deve tenere conto della regola esposta sopra, che vale per tutte le disequazioni, sulla <u>moltiplicazione</u> o <u>divisione</u> con <u>numeri negativi</u>. Per queste disequazioni è superfluo anche il grafico finale.

Esempi:

1)

$5x + 1 < 3x - 7$

SI PORTANO AL PRIMO MEMBRO I TERMINI CON LE x E AL SECONDO I NUMERI :

$5x - 3x < -7 - 1$

SI SOMMANO I TERMINI SIMILI :

$2x < -8$

SI DIVIDE IL I E II MEMBRO PER 2 (ESSENDO 2 UN NUMERO <u>POSITIVO</u> IL VERSO NON CAMBIA)

$\frac{2x}{2} < -\frac{8}{2}$

$\boxed{x < -4}$

2)

$$1 + x > 5x + 3$$

$$x - 5x > 3 - 1$$

$$-4x > 2$$

CAMBIA VERSO PERCHÈ -4 È <u>NEGATIVO</u>

$$\frac{-4x}{-4} < \frac{2}{-4}$$

$$\boxed{x < -\frac{1}{2}}$$

Disequazioni di secondo grado intere

Le disequazioni intere di secondo grado si risolvono sfruttando la conoscenza delle equazioni di secondo grado e la parabola. Diciamo subito che, data una disequazione in forma normale, per esempio $3x^2 - 2x + 8 > 0$, si chiama <u>**equazione associata** alla disequazione</u> l'equazione che si ha mettendo l'uguale al posto del simbolo di maggiore (minore, maggiore o uguale, minore o uguale); nel nostro caso $3x^2 - 2x + 8 = 0$. Facciamo degli esempi di risoluzione.

- RISOLVERE LA SEGUENTE DISEQUAZIONE:

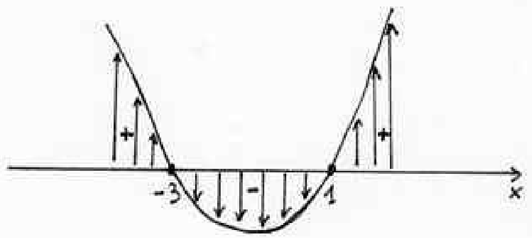
$\boxed{x^2+2x-3\geq 0}$

SI RISOLVE L'EQUAZIONE ASSOCIATA:

$x^2+2x-3=0$

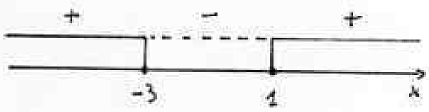
$$x=\frac{-2\pm\sqrt{4+12}}{2}=\frac{-2\pm\sqrt{16}}{2}=\frac{-2\pm 4}{2}= \begin{cases} x_1=\frac{-2-4}{2}=-3 \\ x_2=\frac{-2+4}{2}=1 \end{cases}$$

SI EFFETTUA UN DISEGNO QUALITATIVO DELLA PARABOLA DI EQUAZIONE $y=x^2+2x-3$ TENENDO CONTO CHE (NEL NOSTRO CASO) HA LA CONCAVITÀ RIVOLTA VERSO L'ALTO ED INTERSECA L'ASSE DELLE ASCISSE NEI PUNTI $(-3,0)$ E $(1,0)$, SOLUZIONI DELL'EQUAZIONE ASSOCIATA.



OSSERVAZIONE SUL GRAFICO:

INVECE DI RAPPRESENTARE LA PARABOLA, SI PUÒ RAPPRESENTARE IL SEGNO DEL POLINOMIO AL VARIARE DELLA X, INDICANDO CON LA LINEA CONTINUA IL SEGNO + E LA LINEA TRATTEGGIATA IL SEGNO −



DAL GRAFICO SI OSSERVA CHE LA PARABOLA È POSITIVA QUANDO $x<-3$ OPPURE $x>1$, MENTRE È NEGATIVA QUANDO $-3<x<1$ E VALE ZERO QUANDO $x=-3$ OPPURE $x=1$

POICHÉ LA NOSTRA DISEQUAZIONE RICHIEDEVA I VALORI DI X PER I QUALI IL POLINOMIO x^2+2x-3 (OVVERO LA PARABOLA $y=x^2+2x-3$) È ≥ 0, DOBBIAMO PRENDERE I VALORI DI X UGUALI O ESTERNI A −3 E 1, CIOÈ $\boxed{x\leq -3 \text{ oppure } x\geq 1}$ CHE COSTITUISCE LA SOLUZIONE FINALE.

- RISOLVERE LA SEGUENTE DISEQUAZIONE:

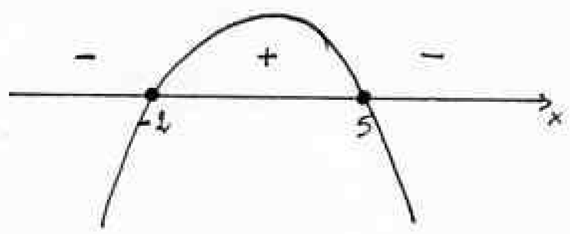
$$\boxed{-x^2+3x+10<0}$$

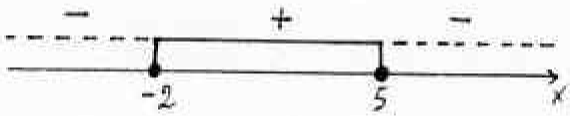
SI RISOLVE L'EQUAZIONE ASSOCIATA:

$$-x^2+3x+10=0$$

$$x=\frac{-3\pm\sqrt{9+40}}{-2}=\frac{-3\pm\sqrt{49}}{-2}=\frac{-3\pm7}{-2}=\begin{cases} x_1=\dfrac{-3-7}{-2}=5 \\ x_2=\dfrac{-3+7}{-2}=-2 \end{cases}$$

EFFETTUIAMO IL GRAFICO CON I DUE METODI (ANCHE SE È SUFFICIENTE UNO SOLO):





POICHÉ LA DISEQUAZIONE RICHIEDEVA I VALORI DI x PER I QUALI IL POLINOMIO (LA PARABOLA) FOSSE <0, SCEGLIAMO I VALORI ESTERNI:

$\boxed{x<-2 \text{ oppure } x>5}$ SOLUZIONE

CASI PARTICOLARI

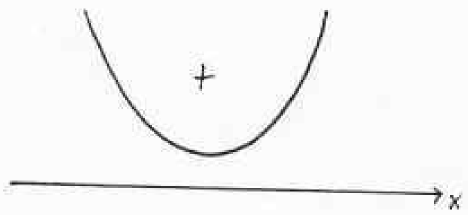
- RISOLVERE LA DISEQUAZIONE:

$$\boxed{x^2+x+3>0}$$

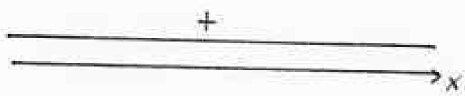
EQUAZIONE ASSOCIATA

$x^2+x+3=0$

$x=\frac{-1\pm\sqrt{1-12}}{2}=\frac{-1\pm\sqrt{-11}}{2}$ EQUAZIONE IMPOSSIBILE → NESSUNA INTERSEZIONE DELLA PARABOLA CON L'ASSE DELLE x



(PARABOLA CHE NON INTERSECA L'ASSE DELLE x)



DAL GRAFICO SI DEDUCE CHE PER OGNI VALORE DI x LA PARABOLA (IL POLINOMIO) È POSITIVA, MA NOI VOLEVAMO PROPRIO I VALORI DI x PER I QUALI $x^2+x+3>0$, QUINDI TUTTI I NUMERI REALI ANDRANNO BENE:

SOLUZIONE: $\boxed{\mathbb{R}}$

- RISOLVERE LA DISEQUAZIONE:

$$\boxed{x^2+x+3<0}$$

LA DISEQUAZIONE È UGUALE ALLA PRECEDENTE TRANNE CHE IL VERSO.
SENZA RIPETERE TUTTI I PASSAGGI, UGUALI AL CASO PRECEDENTE, CI CHIEDIAMO PER QUALI VALORI DI x LA PARABOLA (IL POLINOMIO) È NEGATIVA.
È EVIDENTE DAL GRAFICO CHE CIÒ NON È VERO PER NESSUN VALORE DI x.

SOLUZIONE: $\boxed{\emptyset}$ (INSIEME VUOTO)

NESSUN VALORE (POSSIAMO ANCHE DIRE CHE LA DISEQUAZIONE È IMPOSSIBILE)

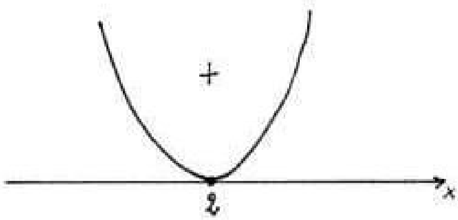
• RISOLVERE LA DISEQUAZIONE:

$$\boxed{x^2-4x+4>0}$$

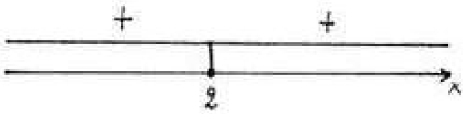
EQUAZIONE ASSOCIATA

$x^2-4x+4=0$

$x=\frac{4\pm\sqrt{16-16}}{2}=\frac{4\pm\sqrt{0}}{2}=\frac{4}{2}=2$ (2 SOLUZIONI REALI COINCIDENTI)



(PARABOLA TANGENTE ALL'ASSE DELLE x)



POICHÈ VOLEVAMO I VALORI DELLA x PER I QUALI LA PARABOLA (IL POLINOMIO) È POSITIVA, NOTIAMO DAL GRAFICO CHE TUTTI I VALORI DI x VANNO BENE, AD ECCEZIONE DI 2, PER IL QUALE IL POLINOMIO È NULLO.

SOLUZIONE: $\boxed{\mathbb{R}-\{2\}}$

• RISOLVERE LA DISEQUAZIONE:

$$\boxed{x^2-4x+4\leq 0}$$

LA DISEQUAZIONE È UGUALE ALLA PRECEDENTE, AD ECCEZIONE DEL VERSO.
POSSIAMO DUNQUE GUARDARE IL GRAFICO DISEGNATO SOPRA.
IL SOLO VALORE PER IL QUALE LA DISEQUAZIONE È SODDISFATTA È $x=2$, INFATTI PER TALE VALORE IL POLINOMIO VALE 0, PER TUTTI GLI ALTRI VALORI ATTRIBUITI AD x IL POLINOMIO È POSITIVO, QUINDI NON SODDISFA LA NOSTRA DISEQUAZIONE

SOLUZIONE: $\boxed{x=2}$

Disequazioni fratte

Le disequazioni fratte si caratterizzano per il fatto di avere almeno una volta l'incognita al denominatore, così come le equazioni fratte. La loro risoluzione si differenzia da quella delle equazioni dal fatto di **non eliminare il denominatore**. Spieghiamo meglio questo processo. Sappiamo che in una frazione numerica sia il Numeratore che il Denominatore contribuiscono al segno complessivo della frazione. Esempi: $\frac{+5}{+2} = +\frac{5}{2}$, $\frac{+5}{-2} = -\frac{5}{2}$, $\frac{-5}{+2} = -\frac{5}{2}$, $\frac{-5}{-2} = +\frac{5}{2}$. La regola che si segue è la stessa "regola dei segni" studiata per la moltiplicazione. Quindi, per avere il segno della disequazione fratta è necessario studiare il segno sia del polinomio che sta al Denominatore, sia quello che sta al Numeratore. I segni dei due polinomi si mettono in un unico grafico e, tramite la regola dei segni, otteniamo il segno complessivo della frazione. Si tratterà poi di scegliere gli intervalli che soddisfano la richiesta della disequazione. Consideriamo poi la forma normale di una disequazione fratta una delle forme $\frac{N(x)}{D(x)} > 0$, $\frac{N(x)}{D(x)} \geq 0$, $\frac{N(x)}{D(x)} < 0$, $\frac{N(x)}{D(x)} \leq 0$ (dove con N(x) e D(x) intendiamo polinomi nell'incognita x). Prima di risolvere la disequazione, se non è già in forma normale, è necessario portarla in forma normale con le regole algebriche già note. Facciamo degli esempi.

• RISOLVERE LA SEGUENTE DISEQUAZIONE:

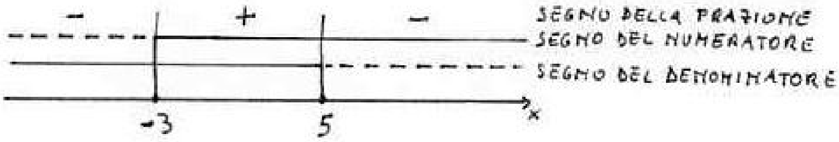
$$\boxed{\frac{2x+6}{5-x}<0}$$

STUDIO IL SEGNO DEL NUMERATORE: $2x+6>0 \rightarrow 2x>-6 \rightarrow x>-\frac{6}{2} \rightarrow x>-3$

IL NUMERATORE È POSITIVO PER $x>-3$ (È NEGATIVO PER $x<-3$)

STUDIO IL SEGNO DEL DENOMINATORE: $5-x>0 \rightarrow -x>-5 \rightarrow x<5$

IL DENOMINATORE È POSITIVO PER $x<5$



POICHÈ VOLEVAMO I VALORI DI x PER I QUALI LA FRAZIONE È NEGATIVA (<0), SCEGLIAMO I VALORI ESTERNI: $\boxed{x<-3 \ \vee \ x>5}$

• RISOLVERE LA SEGUENTE DISEQUAZIONE:

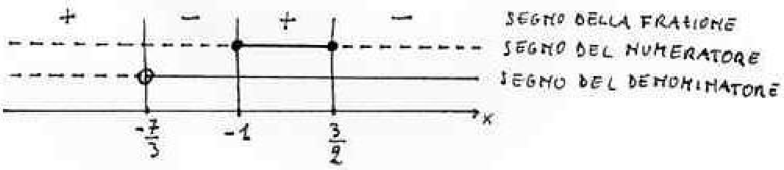
$$\boxed{\frac{-2x^2+x+3}{3x+7}\geq 0}$$

STUDIO IL SEGNO DEL NUMERATORE: $-2x^2+x+3>0$, CONSIDERO L'EQUAZIONE ASSOCIATA: $-2x^2+x+3=0$ $\quad x=\frac{-1\pm\sqrt{1+24}}{-4}=\frac{-1\pm\sqrt{25}}{-4}=\frac{-1\pm 5}{-4}$ $\quad x_1=\frac{-1-5}{-4}=\frac{3}{2}$, $\quad x_2=\frac{-1+5}{-4}=-1$

$N>0$ PER $-1<x<\frac{3}{2}$

STUDIO IL SEGNO DEL DENOMINATORE: $3x+7>0 \rightarrow 3x+7=0 \rightarrow x=-\frac{7}{3}$

$D>0$ PER $x>-\frac{7}{3}$



(SI NOTI COME IN CORRISPONDENZA DI -1 E $\frac{3}{2}$ CI SIANO I "PALLINI PIENI", PERCHÈ ANNULLANO IL NUMERATORE; MENTRE IN CORRISPONDENZA DEL $-\frac{7}{3}$ CI SIA IL "PALLINO VUOTO", IN QUANTO IL DENOMINATORE NON PUÒ MAI ESSERE UGUALE A ZERO).

SOLUZIONE $\boxed{x<-\frac{7}{3} \ \vee \ -1\leq x\leq \frac{3}{2}}$

Sistemi di disequazioni

Per risolvere i sistemi di disequazioni è sufficiente risolvere le singole disequazioni che lo compongono e successivamente fare l'**<u>intersezione</u> delle soluzioni** ottenute. Tale insieme di soluzioni sarà la soluzione del sistema. Esempio:

• RISOLVERE IL SEGUENTE SISTEMA:

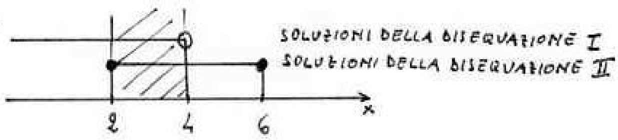
$$\boxed{\begin{cases} -x+4>0 \\ x^2-8x+12\leq 0 \end{cases}}$$

RISOLVO LA DISEQUAZIONE I: $-x+4>0 \rightarrow -x>-4 \rightarrow x<4$

RISOLVO LA DISEQUAZIONE II: $x^2-8x+12\leq 0$, CONSIDERO L'EQUAZIONE ASSOCIATA: $x^2-8x+12=0 \rightarrow x=\frac{8\pm\sqrt{64-48}}{2}=\frac{8\pm\sqrt{16}}{2}=\frac{8\pm 4}{2}= \begin{cases} x_1=\frac{12}{2}=6 \\ x_2=\frac{4}{2}=2 \end{cases}$

$2\leq x\leq 6$

RISOLVO IL SISTEMA:



SI SCELGONO GLI INTERVALLI NEI QUALI SI HANNO LE SOLUZIONI DI <u>TUTTE</u> LE DISEQUAZIONI.

SOLUZIONE: $\boxed{2\leq x<4}$