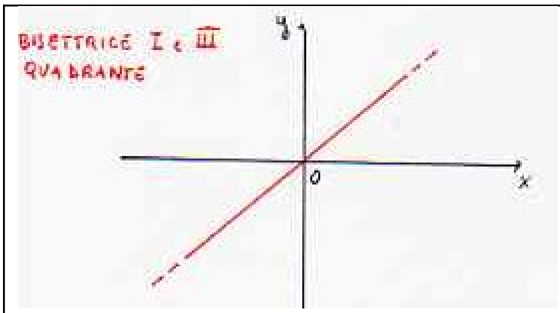
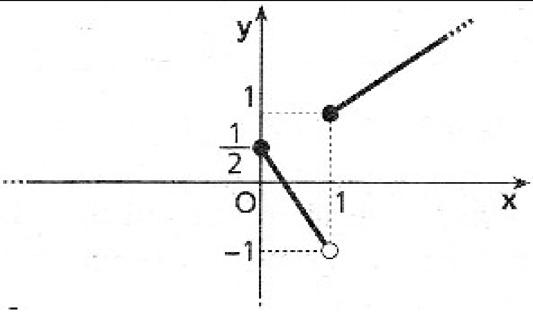
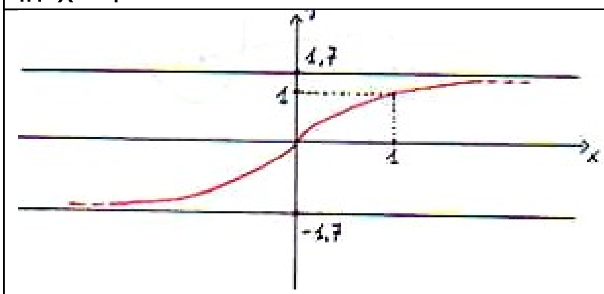
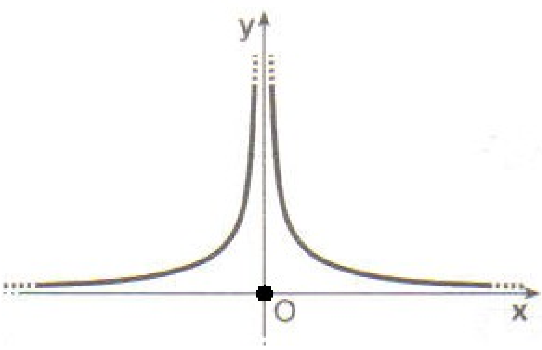
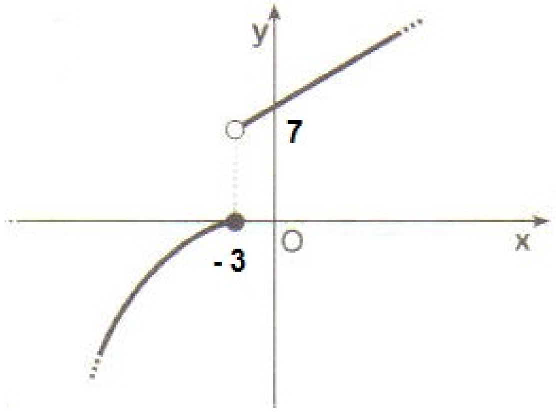
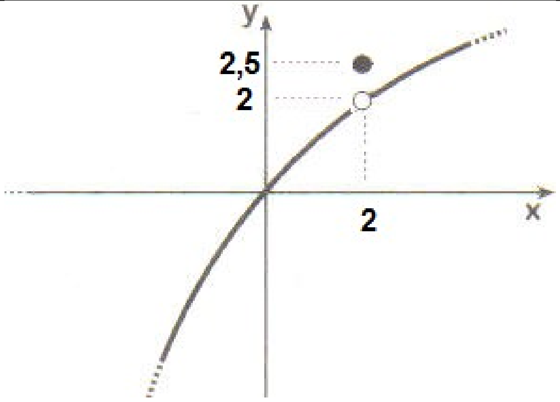
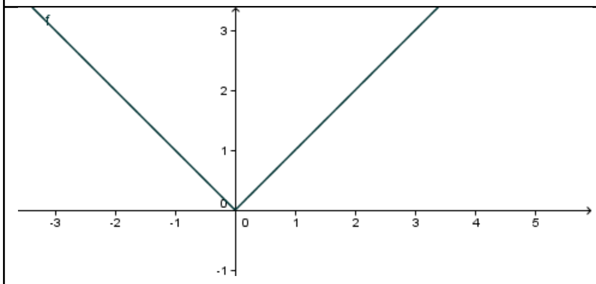
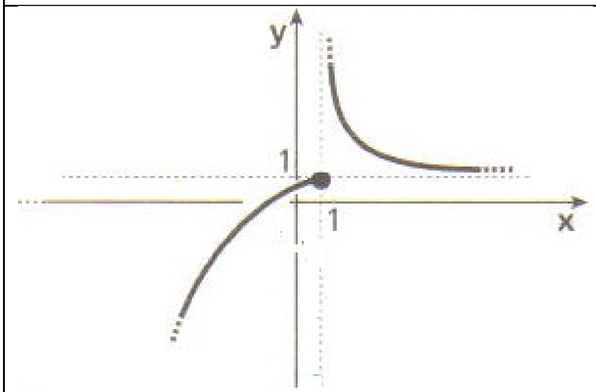
CONTINUITA' – ESERCIZI CON SOLUZIONI

1. Stabilire, in base al grafico, se le funzioni sono continue nel punto indicato. Nel caso non lo siano, stabilire il tipo di discontinuità.

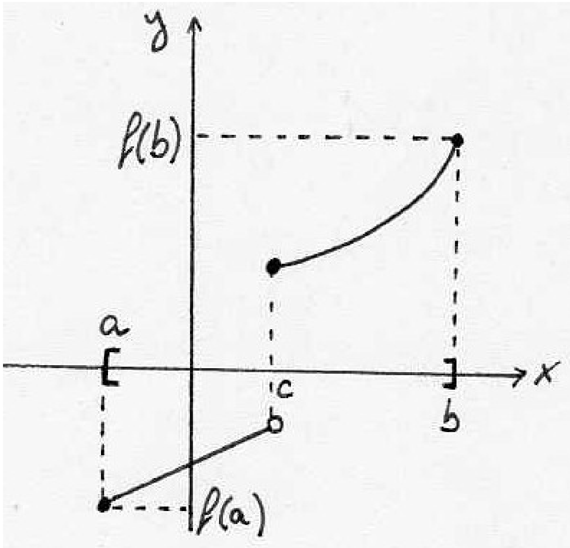
 in $x=0$	$\lim_{x\to 0^-} x = 0$ $\lim_{x\to 0^+} x = 0$ $f(0)=0$ Funzione continua in $x=0$
 in $x=1$	$\lim_{x\to 1^-} f(x) = -1$ $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$ Funzione discontinua in $x=1$ Discontinuità di prima specie (salto=2)
 in $x=1$	$\lim_{x\to 1^-} f(x) = 1$ $\lim_{x\to 1^+} f(x) = 1$ $f(1)=1$ Funzione continua in $x=1$
 in $x=0$	$\lim_{x\to 0^-} f(x) = +\infty$ $\lim_{x\to 0^+} f(x) = +\infty$ Funzione discontinua in $x=0$ Discontinuità di seconda specie

 in $x = -3$	$\lim_{x \to -3^-} f(x) = 0$ $\lim_{x \to -3^+} f(x) = 7$ Funzione discontinua in $x = -3$ Discontinuità di prima specie (salto=7)
 in $x = 2$	$\lim_{x \to 2^-} f(x) = 2$ $\lim_{x \to 2^+} f(x) = 2$ $f(2) = 2{,}5$ Funzione discontinua in $x = 2$ Discontinuità di terza specie
 in $x = 0$	$\lim_{x \to 0^-} \lvert x \rvert = 0$ $\lim_{x \to 0^+} \lvert x \rvert = 0$ $f(0) = 0$ Funzione continua in $x = 0$
 in $x = 1$	$\lim_{x \to 1^-} f(x) = 1$ $\lim_{x \to 1^+} f(x) = +\infty$ Funzione discontinua in $x = 1$ Discontinuità di seconda specie

2. Stabilire se le funzioni sono continue nel punto indicato. Nel caso non lo siano, stabilire il tipo di discontinuità.

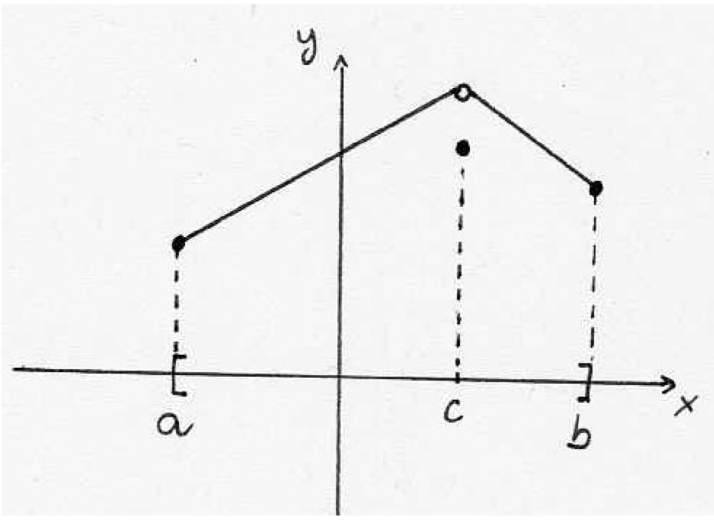
$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x-1}{x} & \text{per } x\neq 0\\ 1 & \text{per } x=0\end{cases}$ in $x=0$	$\lim_{x\to 0^-}\dfrac{x-1}{x}=+\infty$ $\lim_{x\to 0^+}\dfrac{x-1}{x}=-\infty$ Funzione discontinua in $x=0$ Discontinuità di seconda specie
$f(x)=\begin{cases}x^2+2x-5 & \text{per } x<1\\ x^2+2x+5 & \text{per } x\geq 1\end{cases}$ in $x=1$	$\lim_{x\to 1^-}\left(x^2+2x-5\right)=-2$ $\lim_{x\to 1^+}\left(x^2+2x+5\right)=8$ Funzione discontinua in $x=1$ Discontinuità di prima specie (salto = 10)
$f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-4}{x-2} & \text{per } x\neq 2\\ 4 & \text{per } x=2\end{cases}$ in $x=2$	$\lim_{x\to 2^\pm}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\lim_{x\to 2^-}\dfrac{(x-2)\cdot(x+2)}{x-2}=4$ $f(2)=4$ Funzione continua in $x=2$
$f(x)=\begin{cases}\log(x-7) & \text{per } x>7\\ 10^{x-6} & \text{per } x\leq 7\end{cases}$ in $x=7$	$\lim_{x\to 7^-}10^{x-6}=10$ $\lim_{x\to 7^+}\log(x-7)=-\infty$ Funzione discontinua in $x=7$ Discontinuità di seconda specie
$f(x)=\begin{cases}(1+x)^{\frac{1}{x}} & \text{per } x\neq 0\\ \dfrac{1}{e} & \text{per } x=0\end{cases}$ in $x=0$	$\lim_{x\to 0^\pm}(1+x)^{\frac{1}{x}}=e$ $f(0)=\dfrac{1}{e}$ Funzione discontinua in $x=0$ Discontinuità di terza specie

3. Fare un esempio grafico di funzione che non soddisfa l'ipotesi di continuità e quindi la tesi del <u>teorema di esistenza degli zeri</u> non è verificata.



La funzione definita in un insieme chiuso e limitato ha una discontinuità di salto nel punto c, quindi non interseca in nessun punto l'asse delle x.

4. Fare un esempio grafico di funzione che non soddisfa l'ipotesi di continuità e quindi la tesi del <u>teorema di Weierstrass</u> non è verificata.



La funzione definita in un insieme chiuso e limitato ha una discontinuità eliminabile nel punto c. Pur ammettendo minimo assoluto: f(a), non ammette nessun massimo assoluto (pur ammettendo sup). Il codominio è $\left[f(a);\lim_{x\to c} f(x)\right)$.