

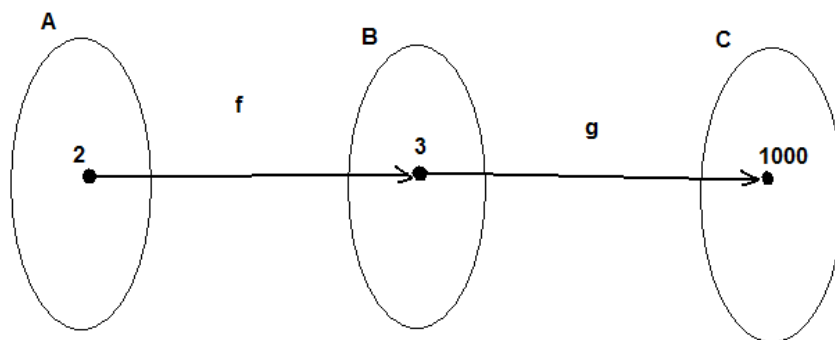
## COMPOSIZIONE DI FUNZIONI

Date due funzioni  $f(x)$  e  $g(x)$ , queste possono essere composte tra di loro formando una nuova funzione. Vediamo come avviene questa operazione tra funzioni.

Data una funzione  $f : A \rightarrow B$  e una funzione  $g : B \rightarrow C$  si definisce  $g \circ f : A \rightarrow C$  la funzione **f composta g**.

Si osservi subito che l'insieme di arrivo della funzione  $f$  deve essere uguale al dominio della funzione  $g$ . La funzione ottenuta ha come dominio il dominio della prima e come insieme di arrivo l'insieme di arrivo della seconda.

Facciamo un esempio: siano  $f(x) = 2x - 1$  e  $g(x) = 10^x$ . Partendo da  $x = 2$  la situazione con gli insiemi è questa:



applicando  $x = 2$  alla funzione  $f$  si ottiene:

$$f(2) = 2 \cdot 2 - 1 = 3$$

applicando  $x = 3$  alla funzione  $g$  si ottiene:

$$g(3) = 10^3 = 1000$$

Nelle funzioni dell'esempio abbiamo preso solamente un valore del dominio della  $f$ . Adesso dobbiamo trovare una formula che vada bene per tutti i valori del dominio di  $f$ .

Riprendiamo le formule algebriche delle due funzioni:  $f(x) = 2x - 1$  e  $g(x) = 10^x$ . Dobbiamo immaginarci che tutta l'espressione della  $f$  diventi l'argomento della  $g$ , ovvero:



Da cui si ha:  $(g \circ f)(x) = 10^{2x-1}$  che si può anche scrivere:  $g[f(x)] = 10^{2x-1}$

Riproviamo allora a calcolare il valore per  $x = 2$  della funzione composta:

$$g[f(2)] = 10^{2^2-1} = 10^3 = 1000$$

### Osservazioni:

- L'ordine con cui si prendono le due funzioni è importante: calcolare  $g \circ f$  significa applicare prima la  $f$  e poi la  $g$ .
- L'operazione di **composizione** tra funzioni **non è un'operazione commutativa**, ovvero, in generale,  $g \circ f \neq f \circ g$
- Si possono comporre più funzioni. In generale posso costruire una nuova funzione da  $n$  funzioni di partenza:  $f_1 \circ f_2 \circ \dots \circ f_n$
- Si può comporre anche una funzione con se stessa.

**Esempi.** Comporre in tutti i modi possibili le seguenti funzioni:

1. Siano  $f(x) = x^2 + 3$  e  $g(x) = \frac{1}{x-1}$

si ha:  $(g \circ f)(x) = \frac{1}{x^2 + 3 - 1} = \frac{1}{x^2 + 2}$      $(f \circ g)(x) = \frac{1}{(x-1)^2} + 3$

$(f \circ f)(x) = (x^2 + 3)^2 + 3$      $(g \circ g)(x) = \frac{1}{\frac{1}{x-1} - 1}$

2. Siano  $f(x) = \log(x^4 + 2)$  e  $g(x) = 1 - 5x$

si ha:  $(g \circ f)(x) = 1 - 5 \log(x^4 + 2)$      $(f \circ g)(x) = \log[(1 - 5x)^4 + 2]$

$(f \circ f)(x) = \log[\log^4(x^4 + 2) + 2]$      $(g \circ g)(x) = 1 - 5 \cdot (1 - 5x)$

Lasciamo il lettore con una domanda: *“Cosa succede se si compone una funzione con la propria funzione inversa?”*