DERIVATE – ESERCIZI CON SOLUZIONI

1. Calcolare le seguenti derivate applicando la definizione:

a. $f(x)=\frac{1}{x}$ per $x_0 = x$

Applicando la definizione di derivata in un punto: $f'(x_0)=\lim_{h\to 0}\frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ si ha:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{1}{x+h}-\frac{1}{x}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\frac{x-(x+h)}{x(x+h)}}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{x-x-h}{xh(x+h)}=\lim_{h\to 0}\frac{-h}{xh(x+h)}=\lim_{h\to 0}\frac{-1}{x(x+h)}=-\frac{1}{x^2}$$

b. $f(x)=e^x$ per $x_0 = x$

Si applica la definizione di derivata in un punto:

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{e^{x+h}-e^x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^x\cdot e^h-e^x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{e^x(e^h-1)}{h} \qquad (*)$$

Analizziamo una parte del limite: $\lim_{h\to 0}\frac{(e^h-1)}{h}$ si pone $e^h-1=t$ da cui $e^h=t+1$ e quindi $h=\ln(t+1)$. Sostituendo si ha:

$$\lim_{h\to 0}\frac{(e^h-1)}{h}=\lim_{t\to 0}\frac{t}{\ln(t+1)}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\frac{1}{t}\ln(t+1)}=\lim_{t\to 0}\frac{1}{\ln(t+1)^{\frac{1}{t}}}$$

sapendo che $\lim_{t\to 0}(t+1)^{\frac{1}{t}}=e$ per il limite notevole, si ha: $\lim_{t\to 0}\frac{1}{\ln(t+1)^{\frac{1}{t}}}=\frac{1}{\ln e}=\frac{1}{1}=1$

Ricapitolando si ha (*) $\lim_{h\to 0}\frac{e^x(e^h-1)}{h}=e^x\cdot 1=e^x$

Quindi $f'(x)=e^x$

Da notare che la derivata della funzione e^x è uguale alla funzione stessa !

c. $f(x)=5x^2-3x+1$ per $x_0 = 2$

Si applica la definizione di derivata in un punto:

$$f'(2)=\lim_{h\to 0}\frac{\left[5(2+h)^2-3(2+h)+1\right]-\left[5(2)^2-3(2)+1\right]}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{\left[5(4+4h+h^2)-6-3h+1\right]-\left[20-6+1\right]}{h}=$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{[20 + 20h + 5h^2 - 5 - 3h] - 15}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{5h^2 + 17h + 15 - 15}{h} = \lim_{h \to 0} \frac{h(5h + 17)}{h} = \lim_{h \to 0}(5h + 17) = 17$$

2. Dire se le seguenti funzioni sono derivabili, applicando la definizione di derivata, nei punti indicati:

a. $f(x) = \begin{cases} x - 3 & \text{per} \quad x < -1 \\ 2x - 2 & \text{per} \quad x \geq -1 \end{cases}$ in $x_0 = -1$

Derivata sinistra:

$$f'_-(x) = \lim_{h \to 0^-} \frac{(-1 + h - 3) - (-1 - 3)}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{-4 + h + 4}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{h}{h} = 1$$

Derivata destra:

$$f'_+(x) = \lim_{h \to 0^+} \frac{(2(-1 + h) - 2) - (2(-1) - 2)}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{-2 + 2h - 2 + 4}{h} = \lim_{h \to 0^+} \frac{2h}{h} = 2$$

Poiché le due derivate, benché finite, sono diverse, possiamo concludere che la funzione **non è derivabile** nel punto indicato.

b. $f(x) = \sqrt[3]{x}$ in $x_0 = 0$

Derivata sinistra:

$$f'_-(x) = \lim_{h \to 0^-} \frac{\sqrt[3]{0 + h} - \sqrt[3]{0}}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{\sqrt[3]{h}}{h}$$ forma indeterminata del tipo $\frac{0}{0}$

$$\lim_{h \to 0^-} \frac{\sqrt[3]{h}}{h} = \lim_{h \to 0^-} \frac{\sqrt[3]{h}}{\sqrt[3]{h} \cdot \sqrt[3]{h^2}} = \lim_{h \to 0^-} \frac{1}{\sqrt[3]{h^2}} = +\infty$$

Derivata destra: si svolgono gli stessi passaggi della derivata sinistra e si ottiene ancora $+\infty$

Poiché le derivate sinistra e destra sono infinite, la funzione data **non è derivabile** nel punto $x_0 = 0$

3. Calcolare, con le tavole di derivate, le derivate delle seguenti funzioni:
   (usare le derivate delle funzioni fondamentali)

a. $y = 7$ $y' = 0$

b. $y = e$ $y' = 0$

c. $y = \pi$ $y' = 0$

d. $y = -\frac{1}{3}$ $y' = 0$

e. $y = \log 5$ $y' = 0$

f. $y = \sqrt[3]{7} - 1872$ $y' = 0$

g. $y = x$ $y' = 1$

h. $y = \frac{1}{x}$ $y' = -\frac{1}{x^2}$

i. $y = \sqrt{x}$ $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$

j. $y = \sqrt[5]{x}$ $y' = \frac{1}{5 \cdot \sqrt[5]{x^4}}$

k. $y = 2^x$ $y' = 2^x \ln 2$

l. $y = e^x$ $y' = e^x$

m. $y = \log_3 x$ $y' = \frac{1}{x}\log_3 e$

n. $y = \ln x$ $y' = \frac{1}{x}$

(usare le regole di derivazione)

o. $y = 3x$ $y' = 3$

p. $y = -5x^3$ $y' = -5 \cdot 3x^2 = -15x^2$

q. $y = 3^x + x^2$ $y' = 3^x \ln 3 + 2x$

r. $y = \sqrt{x} - e^x$ $y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} - e^x$

s. $y = x^3 - x^2 + x - 1$ $y' = 3x^2 - 2x + 1$

t. $y = x^5 \cdot \log_2 x$ $y' = 5x^4 \cdot \log_2 x + x^5 \cdot \frac{1}{x}\log_2 e$

u. $y = x \cdot \ln x$ $y' = 1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} = \ln x + 1$

v. $y = \frac{4^x}{x^2}$ $y' = \frac{4^x \ln 4 \cdot x^2 - 4^x \cdot 2x}{\left(x^2\right)^2}$

w. $y = \frac{\ln x}{\sqrt{x}}$ $\qquad y' = \frac{\frac{1}{x} \cdot \sqrt{x} - \ln x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{\left(\sqrt{x}\right)^2} = \frac{\frac{\sqrt{x}}{x} - \frac{\ln x}{2\sqrt{x}}}{x}$

x. $y = \left(2x^2 - x\right)^3$ $\qquad y' = 3\left(2x^2 - x\right)^2 \cdot (4x - 1)$

y. $y = e^{4x^3 - 2}$ $\qquad y' = e^{4x^3 - 2} \cdot 12x^2 = 12x^2 \cdot e^{4x^3 - 2}$

z. $y = \log_5(2x + 3)$ $\qquad y' = \frac{1}{2x + 3} \log_5 e \cdot 2 = \frac{2}{2x + 3} \log_5 e$

aa. $y = \ln\sqrt[3]{e^{x^2 + 2x}}$ $\qquad y' = \frac{1}{\sqrt[3]{e^{x^2 + 2x}}} \cdot \frac{1}{3 \cdot \sqrt[3]{\left(e^{x^2 + 2x}\right)^2}} \cdot e^{x^2 + 2x} \cdot (2x + 2)$

bb. $y = \frac{x \cdot \ln x - 3^{\frac{1}{x}} + 5 \cdot e^x}{\sqrt[5]{\log_2\left(3x^6 - 5x^4 + x^2\right)}}$

$$y' = \frac{\left(1 \cdot \ln x + x \cdot \frac{1}{x} - 3^{\frac{1}{x}} \cdot \ln 3 \cdot \left(-\frac{1}{x^2}\right) + 5 \cdot e^x\right) \cdot \sqrt[5]{\log_2\left(3x^6 - 5x^4 + x^2\right)}}{\left(\sqrt[5]{\log_2\left(3x^6 - 5x^4 + x^2\right)}\right)^2} +$$

$$- \frac{\left(x \cdot \ln x - 3^{\frac{1}{x}} + 5 \cdot e^x\right) \cdot \left(\frac{1}{5 \cdot \sqrt[5]{\left(\log_2\left(3x^6 - 5x^4 + x^2\right)\right)^4}} \cdot \frac{1}{3x^6 - 5x^4 + x^2} \cdot \log_2 e \cdot \left(18x^5 - 20x^3 + 2x\right)\right)}{\left(\sqrt[5]{\log_2\left(3x^6 - 5x^4 + x^2\right)}\right)^2}$$

4. Calcolare le funzioni derivate fino al 4ª ordine delle seguenti funzioni:

a. $y = e^x$ $\qquad y' = e^x \qquad y'' = e^x \qquad y''' = e^x \qquad y^{iv} = e^x$

b. $y = x^3 - 2x + 4$ $\qquad y' = 3x^2 - 2 \qquad y'' = 6x \qquad y''' = 6 \qquad y^{iv} = 0$

5. Trovare per quali intervalli la funzione $y = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 1$ cresce/decresce.

Essendo una funzione algebrica razionale intera (polinomiale) il dominio è tutto R e la funzione è derivabile in tutto il dominio. Per calcolare gli intervalli di crescenza/decrescenza della funzione dobbiamo calcolare la funzione derivata e studiarne il segno:

$y' = \frac{1}{3} \cdot 3x^2 - 4$ da cui $y' = x^2 - 4$

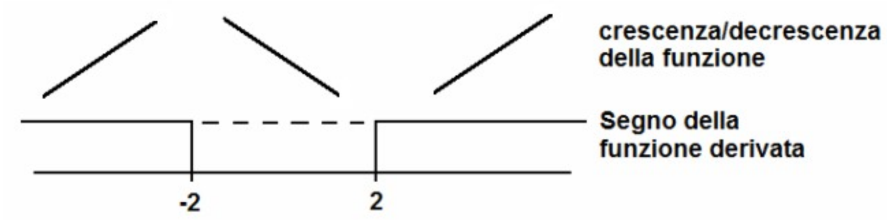
Per studiare il segno della funzione derivata è sufficiente impostare la disequazione:

$x^2 - 4 > 0$ da cui, risolvendo l'equazione associata che ha soluzioni $x_1 = -2$ e $x_2 = 2$, si ha: $x < -2$ o $x > 2$. Ricapitolando:

$y' > 0$ per $(-\infty; -2) \cup (2; +\infty)$ quindi y cresce

$y' = 0$ per $x = -2$ e $x = 2$ quindi y è costante

$y' < 0$ per $(-2; 2)$ quindi y decresce



Osservazione: il punto $x = -2$ viene detto di **Massimo relativo** per la funzione, perché a sinistra la funzione cresce e a destra decresce, il punto $x = 2$ viene detto di **Minimo relativo** per la funzione, perché a sinistra la funzione decresce e a destra cresce. Per una definizione più rigorosa dei punti di massimo e minimo relativo e per ulteriori esempi si rimanda al modulo dello studio di funzioni.

Di seguito è rappresentato il grafico della funzione data $y = \frac{1}{3}x^3 - 4x + 1$